개념원리® 기하

정답과 풀이

Ⅰ. 이차곡선

1

답 $3,\ 12x$

2

(1) $y^2=4px$라 하면 $p=\frac{1}{6}$이므로

$y^2=\frac{2}{3}x$

(2) $x^2=4py$라 하면 $p=-1$이므로

$x^2=-4y$

답 (1) $\boldsymbol{y^2=\frac{2}{3}x}$ (2) $\boldsymbol{x^2=-4y}$

3

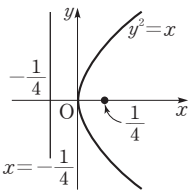
(1) $y^2=x=4\times\frac{1}{4}x$

이므로 $p=\frac{1}{4}$

따라서 **초점의 좌표**는 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$,

준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}$이고,

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

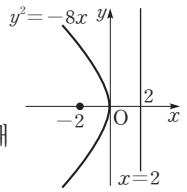


(2) $y^2=-8x=4\times(-2)x$

이므로 $p=-2$

따라서 **초점의 좌표**는 $(-2,\ 0)$,

준선의 방정식은 $x=2$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



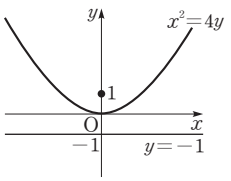
(3) $x^2=4y=4\times1y$

이므로 $p=1$

따라서 **초점의 좌표**는

$(0,\ 1)$, **준선의 방정식**은

$y=-1$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



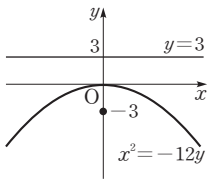
(4) $x^2=-12y=4\times(-3)y$

이므로 $p=-3$

따라서 **초점의 좌표**는

$(0,\ -3)$, **준선의 방정식**은

$y=3$이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

4

$y^2=-6x=4\times\left(-\frac{3}{2}\right)x$에서

초점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, 준선의 방정식은 $x=\frac{3}{2}$

따라서 평행이동한 **포물선의 방정식**은

$\boldsymbol{(y+3)^2=-6\left(x-\frac{1}{2}\right)}$이고,

초점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2},\ 0-3\right)$, 즉 $\boldsymbol{(-1,\ -3)}$,

준선의 방정식은 $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$, 즉 $\boldsymbol{x=2}$

답 풀이 참조

5

(1) 점 P가 나타내는 도형은 초점이 $\mathrm{F}(-5,\ 0)$이고

준선이 $x=5$인 포물선이므로

$y^2=-20x$

(2) 점 P가 나타내는 도형은 초점이 $\mathrm{F}\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$이고

준선이 $y=-\frac{3}{4}$인 포물선이므로

$x^2=3y$

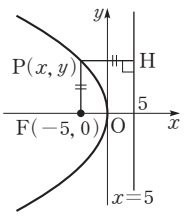
답 (1) $\boldsymbol{y^2=-20x}$ (2) $\boldsymbol{x^2=3y}$

다른풀이 (1) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하고, 점 P에서 직선 $x=5$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

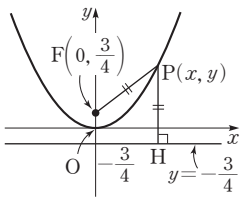
$\sqrt{(x+5)^2+y^2}=|x-5|$

양변을 제곱하여 정리하면

$y^2=-20x$



(2) 점 P의 좌표를 (x, y)라 하고, 점 P에서 직선 $y=-\frac{3}{4}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2}=\left|y-\left(-\frac{3}{4}\right)\right|$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2=3y$

6

준선이 $x=-\frac{5}{2}$이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은

$y^2=4\times\frac{5}{2}\times x$ $\therefore y^2=10x$

이 포물선이 점 $(a, 10)$을 지나므로

$100=10a$ $\therefore a=10$ **답 10**

7

(1) 주어진 포물선은 준선이 y축에 평행하므로 포물선의 방정식을 $(y-n)^2=4p(x-m)$이라 하면

초점의 좌표는 $(p+m, n)$,

준선의 방정식은 $x=-p+m$

따라서 $p+m=-2$, $n=3$, $-p+m=4$이므로

$m=1$, $n=3$, $p=-3$

$\therefore (y-3)^2=-12(x-1)$

(2) 주어진 포물선은 준선이 x축에 평행하므로 포물선의 방정식을 $(x-m)^2=4p(y-n)$이라 하면

초점의 좌표는 $(m, p+n)$,

준선의 방정식은 $y=-p+n$

따라서 $m=4$, $p+n=-5$, $-p+n=-2$이므로

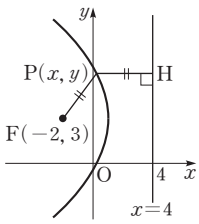
$m=4$, $n=-\frac{7}{2}$, $p=-\frac{3}{2}$

$\therefore (x-4)^2=-6\left(y+\frac{7}{2}\right)$

답 (1) $\boldsymbol{(y-3)^2=-12(x-1)}$

(2) $\boldsymbol{(x-4)^2=-6\left(y+\frac{7}{2}\right)}$

다른풀이 (1) 포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하고 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로



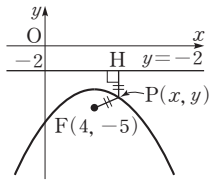
$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$

$=|4-x|$

양변을 제곱하여 정리하면

$(y-3)^2=-12(x-1)$

(2) 포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하고 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로



$\sqrt{(x-4)^2+(y+5)^2}=|y-(-2)|$

양변을 제곱하여 정리하면

$(x-4)^2=-6\left(y+\frac{7}{2}\right)$

8

주어진 포물선은 준선이 y축에 평행하므로 포물선의 방정식을 $(y-n)^2=4p(x-m)$이라 하면

초점의 좌표는 $(p+m, n)$,

준선의 방정식은 $x=-p+m$

따라서 $p+m=\frac{3}{2}$, $n=2$, $-p+m=\frac{1}{2}$이므로

$m=1$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$

$\therefore (y-2)^2=2(x-1)$

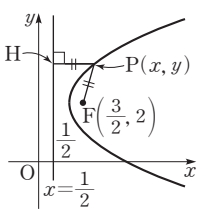
이 식에 $y=0$을 대입하면

$4=2(x-1)$ $\therefore x=3$

즉, 포물선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(3, 0)$이다.

답 (3, 0)

다른풀이 포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하고 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로



$\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|$

양변을 제곱하여 정리하면

$(y-2)^2=2(x-1)$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$4=2(x-1)$ $\therefore x=3$

즉, 포물선이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(3, 0)$이다.

9

(1) 주어진 식에서 $y^2-6y+9=-2x-2$

$\therefore (y-3)^2=-2(x+1)$

이 포물선은 포물선 $y^2=-2x$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=-2x$의

초점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$,

준선의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$,

꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$

이므로 구하는 포물선의

초점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$,

준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{2}$,

꼭짓점의 좌표는 $(-1, 3)$

(2) 주어진 식에서 $8y=x^2-4x$

$x^2-4x+4=8y+4$

$\therefore (x-2)^2=8\left(y+\frac{1}{2}\right)$

이 포물선은 포물선 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=8y$의

초점의 좌표는 $(0, 2)$,

준선의 방정식은 $y=-2$,

꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$

이므로 구하는 포물선의

초점의 좌표는 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$,

준선의 방정식은 $y=-\frac{5}{2}$,

꼭짓점의 좌표는 $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

답 풀이 참조

10

주어진 식에서 $x^2-4x+4=4py+4p$

$\therefore (x-2)^2=4p(y+1)$

이 포물선은 포물선 $x^2=4py$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 초점의 좌표는 $(2, p-1)$이므로

$p-1=-\frac{1}{2}$ $\therefore p=\frac{1}{2}$ **답 $\frac{1}{2}$**

11

포물선 $y^2-8x+8a=0$, 즉 $y^2=8(x-a)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는

$(2+a, 0)$

포물선 $y^2+4x+4b=0$, 즉 $y^2=-4(x+b)$는 포물선 $y^2=-4x$를 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는

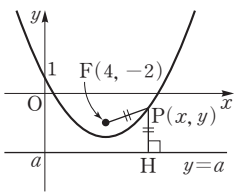
$(-1-b, 0)$

두 초점이 서로 일치하므로

$2+a=-1-b$ $\therefore a+b=-3$ **답 -3**

12

포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$, 준선의 방정식을 $y=a$라 하고 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}=|y-a|$

양변을 제곱하면

$(x-4)^2+(y+2)^2=(y-a)^2$ ····· ㉠

㉠이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$(1-a)^2=25$

$1-a=5$ 또는 $1-a=-5$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=6$

(i) $a=-4$일 때, ㉠에서

$(x-4)^2+(y+2)^2=(y+4)^2$

$\therefore (x-4)^2=4(y+3)$

(ii) $a=6$일 때, ㉠에서

$(x-4)^2+(y+2)^2=(y-6)^2$

$\therefore (x-4)^2=-16(y-2)$

(i), (ii)에서 구하는 포물선의 방정식은

$(x-4)^2=4(y+3)$, $(x-4)^2=-16(y-2)$

답 $(x-4)^2=4(y+3)$, $(x-4)^2=-16(y-2)$

13

축이 y축에 평행하므로 구하는 포물선의 방정식을 $x^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C는 상수, $B\neq0$)이라 하자.

이 포물선은 세 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(2, -1)$을 지나므로

$C=0$ …… ㉠

$16+4A+C=0$ …… ㉡

$4+2A-B+C=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $A=-4$, $B=-4$, $C=0$

따라서 $x^2-4x-4y=0$이므로

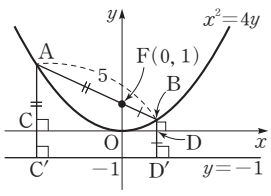
$(x-2)^2=4(y+1)$

즉, 이 포물선은 포물선 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는 $(2, 0)$이다. **답 $(2, 0)$**

14

포물선 $x^2=4y$의 초점 F의 좌표는 $(0, 1)$이고 준선의 방정식은 $y=-1$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{AF}=\overline{AC'}$, $\overline{BF}=\overline{BD'}$

이므로

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AC'}+\overline{BD'}$

$=(\overline{AC}+1)+(\overline{BD}+1)$

$=\overline{AC}+\overline{BD}+2$

이때 $\overline{AB}=5$이므로

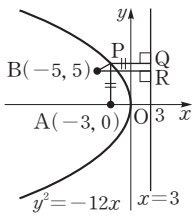
$\overline{AC}+\overline{BD}+2=5$

$\therefore \overline{AC}+\overline{BD}=3$ **답 3**

15

포물선 $y^2=-12x=4\times(-3)x$의 초점은 $A(-3, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=3$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 Q라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AP}=\overline{PQ}$이므로



$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{PQ}+\overline{BP}$

점 B에서 직선 $x=3$에 내린 수선의 발을 R라 하면 세 점 B, P, R가 일직선 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{PQ}+\overline{BP}$

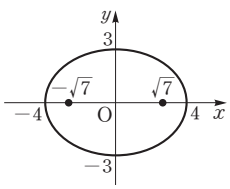
$\geq\overline{BR}$

$=3-(-5)=8$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 8이다. **답 8**

16

답 9, $\sqrt{7}$, $(\sqrt{7}, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$, 4, 8, 3, 6, $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$



17

(1) 타원의 한 초점의 좌표를 $(c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

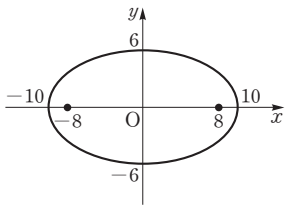
$c=\sqrt{100-36}=8$

따라서 **초점의 좌표**는 $\mathbf{(8, 0), (-8, 0)}$,

장축의 길이는 $2\times10=\mathbf{20}$,

단축의 길이는 $2\times6=\mathbf{12}$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $4x^2+y^2=4$에서 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

타원의 한 초점의 좌표를 $(0, c)$ $(c>0)$라 하면

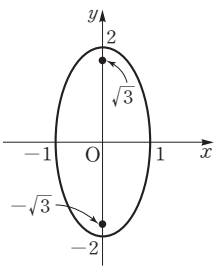
$c=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

따라서 **초점의 좌표**는 $\mathbf{(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})}$,

장축의 길이는 $2\times2=\mathbf{4}$,

단축의 길이는 $2\times1=\mathbf{2}$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

18

(1) 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$의 중심의 좌표는 $(0, 0)$,

초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{3})$, $(0, -2\sqrt{3})$ ← $\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$

이므로 구하는 타원의 중심의 좌표는 $(3, -1)$,

초점의 좌표는 $(3, 2\sqrt{3}-1)$, $(3, -2\sqrt{3}-1)$

(2) $16(x+5)^2+25y^2=400$에서

$\frac{(x+5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$을 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 중심의 좌표는 $(0, 0)$,

초점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$ ← $\sqrt{25-16}=3$

이므로 구하는 타원의 중심의 좌표는 $(-5, 0)$,

초점의 좌표는 $(-2, 0)$, $(-8, 0)$

답 (1) **중심의 좌표: $(3, -1)$**

초점의 좌표: $(3, 2\sqrt{3}-1)$, $(3, -2\sqrt{3}-1)$

(2) **중심의 좌표: $(-5, 0)$**

초점의 좌표: $(-2, 0)$, $(-8, 0)$

19

(1) 두 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$

이라 하자. 거리의 합이 10이므로

$2a=10$ $\quad\therefore a=5$

$a^2-b^2=4^2$에서 $b^2=5^2-4^2=9$

$\therefore \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

(2) 두 초점이 y축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$

이라 하자. 거리의 합이 14이므로

$2b=14$ $\quad\therefore b=7$

$b^2-a^2=5^2$에서 $a^2=7^2-5^2=24$

$\therefore \frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$

답 (1) $\mathbf{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$ (2) $\mathbf{\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1}$

다른풀이 (1) 조건을 만족시키는 타원 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 타원의 정의에 의하여
$\overline{PF}+\overline{PF'}=10$이므로
$\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10$
$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=10-\sqrt{(x+4)^2+y^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$5\sqrt{(x+4)^2+y^2}=4x+25$
다시 양변을 제곱하여 정리하면
$9x^2+25y^2=225$
$\therefore \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

(2) 조건을 만족시키는 타원 위의 점을 $P(x, y)$라 하면
타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=14$이므로
$\sqrt{x^2+(y-5)^2}+\sqrt{x^2+(y+5)^2}=14$
$\sqrt{x^2+(y-5)^2}=14-\sqrt{x^2+(y+5)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$7\sqrt{x^2+(y+5)^2}=5y+49$
다시 양변을 제곱하여 정리하면
$49x^2+24y^2=1176$
$\therefore \frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$

20

점 P가 나타내는 도형은 두 점 $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$를 초점으로 하는 타원이다.
두 초점이 y축 위에 있으므로 구하는 도형의 방정식을
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$
이라 하면 $b^2-a^2=(\sqrt{2})^2$에서
$a^2=b^2-2$ …… ㉠
또, 타원이 점 $(\sqrt{3}, 2)$를 지나므로
$\frac{3}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$\frac{3}{b^2-2}+\frac{4}{b^2}=1$
$3b^2+4(b^2-2)=b^2(b^2-2)$
$b^4-9b^2+8=0$, $(b^2-1)(b^2-8)=0$
$\therefore b^2=8\ (\because\ b^2>c^2=2)$
$b^2=8$을 ㉠에 대입하면 $a^2=8-2=6$
따라서 구하는 도형의 방정식은
$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}=1$ **답** $\boldsymbol{\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}=1}$

21

두 초점이 y축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$
이라 하자.
단축의 길이가 4이므로
$2a=4$ $\therefore a=2$
$b^2-a^2=(\sqrt{3})^2$에서 $b^2=2^2+(\sqrt{3})^2=7$
$\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$ **답** $\boldsymbol{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1}$

22

두 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$
이라 하면 $F(8, 0)$, $F'(-8, 0)$이므로
$a^2-b^2=8^2$
$\therefore (a+b)(a-b)=64$ …… ㉠
이때 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$이고 장축과 단축의 길이의 차가 8이므로
$2a-2b=8$ $\therefore a-b=4$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$4(a+b)=64$ $\therefore a+b=16$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=10$, $b=6$
$\therefore \overline{PF}+\overline{PF'}=2a=20$ **답 20**

23

$4x^2+9y^2=36$에서 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$이므로 초점의 좌표는
$(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$

이때 두 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

이라 하자. 장축의 길이가 $2\sqrt{15}$이므로

$2a=2\sqrt{15}$ $\therefore a=\sqrt{15}$

$a^2-b^2=(\sqrt{5})^2$에서 $b^2=(\sqrt{15})^2-(\sqrt{5})^2=10$

$\therefore b=\sqrt{10}\ (\because b>0)$

따라서 구하는 단축의 길이는

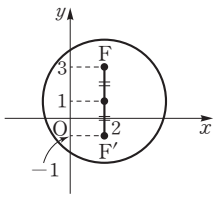
$2b=2\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}$ **답 $2\sqrt{10}$**

24

타원의 중심은 선분 FF′의 중점이므로

$\left(\frac{2+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)$, 즉

$(2, 1)$



이때 두 초점이 y축과 평행한 직선 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$\frac{(x-2)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$

이라 하자. 거리의 합이 8이므로

$2b=8$ $\therefore b=4$

또한, 중심에서 초점까지의 거리가 2이므로

$2^2=b^2-a^2$에서 $a^2=4^2-2^2=12$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$\frac{(x-2)^2}{12}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

답 $\frac{(x-2)^2}{12}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

다른풀이 타원 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=8$이므로

$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=8$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=8-\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=y+7$

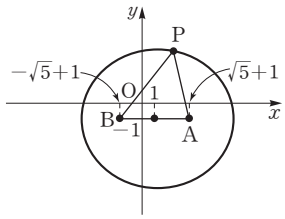
다시 양변을 제곱하여 정리하면

$4(x-2)^2+3(y-1)^2=48$

$\therefore \frac{(x-2)^2}{12}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

25

점 P가 나타내는 도형은 두 점 $A(\sqrt{5}+1, -1)$, $B(-\sqrt{5}+1, -1)$에서의 거리의 합이 10인 타원이고, 두 점 A, B는 타원의 초점이다.



타원의 중심은 선분 AB의 중점이므로

$\left(\frac{(\sqrt{5}+1)+(-\sqrt{5}+1)}{2}, \frac{-1+(-1)}{2}\right)$, 즉

$(1, -1)$

이때 두 초점이 x축과 평행한 직선 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을

$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y+1)^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

이라 하자. 장축의 길이가 10이므로

$2a=10$ $\therefore a=5$

또한, 중심에서 초점까지의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$(\sqrt{5})^2=a^2-b^2$에서 $b^2=5^2-(\sqrt{5})^2=20$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$

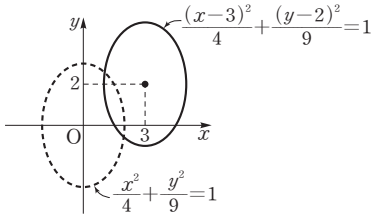
답 $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$

26

주어진 식에서 $9(x-3)^2+4(y-2)^2=36$

양변을 36으로 나누면 $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$의

초점의 좌표는 $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$,

꼭짓점의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$,

중심의 좌표는 $(0, 0)$

이므로 구하는 타원의

초점의 좌표는 $(3, \sqrt{5}+2)$, $(3, -\sqrt{5}+2)$,

꼭짓점의 좌표는 $(5, 2)$, $(1, 2)$, $(3, 5)$, $(3, -1)$,

중심의 좌표는 $(3, 2)$,

장축의 길이는 $2\times3=6$,

단축의 길이는 $2\times2=4$ **답 풀이 참조**

27

$2x^2+3y^2-16x+6y+11=0$에서

$2(x-4)^2+3(y+1)^2=24$

$\therefore \frac{(x-4)^2}{12}+\frac{(y+1)^2}{8}=1$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=4$, $b=-1$이므로

$a+b=3$ **답 3**

28

$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$에서 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{QF}+\overline{QF'}=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

따라서 사각형 PF′QF의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{FQ}+\overline{QF'}+\overline{F'P}$

$=(\overline{PF}+\overline{PF'})+(\overline{QF}+\overline{QF'})$

$=4\sqrt{3}+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ **답 $8\sqrt{3}$**

29

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 $b>a>0$이라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{AF'}=\overline{BF}+\overline{BF'}=2b$

삼각형 ABF′의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BF'}+\overline{F'A}$

$=\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{BF'}+\overline{AF'}$

$=(\overline{AF}+\overline{AF'})+(\overline{BF}+\overline{BF'})$

$=2b+2b=4b$

즉, $4b=36$이므로 $b=9$

이때 타원의 초점의 좌표가 $(0, 6)$, $(0, -6)$이므로

$6^2=b^2-a^2$ $\therefore a^2=9^2-6^2=45$

$\therefore a^2+b^2=45+9^2=126$ **답 126**

30

$2x^2+y^2=6$에서 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$

$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$a+b=2\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$2\sqrt{6}\geq2\sqrt{ab}$, $\sqrt{ab}\leq\sqrt{6}$

$\therefore ab\leq6$

따라서 $\overline{PF}\times\overline{PF'}$의 최댓값은 6이다. **답 6**

31

점 $P(a, b)$가 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{16}=1$

이때 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{16}\geq2\sqrt{\frac{a^2}{25}\times\frac{b^2}{16}}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{25}=\frac{b^2}{16}\text{일 때 성립}\right)$

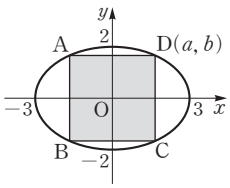
$1\geq\frac{ab}{10}$ ($\because a>0$, $b>0$)

$\therefore 0<ab\leq10$

따라서 ab의 최댓값은 10이다. **답 10**

32

오른쪽 그림과 같이 제1사분면 위의 점 D의 좌표를 (a, b)라 하면 $a>0$, $b>0$이고



$\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}=1$

이때 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{9}\times\frac{b^2}{4}}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{9}=\frac{b^2}{4}\text{일 때 성립}\right)$

$1\geq\frac{ab}{3}$ ($\because$ $a>0$, $b>0$)

$\therefore ab\leq 3$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$2a\times 2b=4ab\leq 4\times 3=12$

이므로 구하는 넓이의 최댓값은 12이다. **답 12**

33

$2x^2+y^2=4$에서 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$

$\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$이므로 두 초점 F, F′의 좌표는 각각

$(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$

$\therefore \overline{FF'}=2\sqrt{2}$

$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$a+b=2\times 2=4$ …… ㉠

이때 삼각형 PFF′은 $\angle FPF'=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=(2\sqrt{2})^2$

$\therefore (a+b)^2-2ab=8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4^2-2ab=8$ $\quad\therefore ab=4$

따라서 삼각형 PFF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{PF'}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times 4=2$ **답 2**

34

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$에서 $\sqrt{25-9}=4$이므로 두 초점 F, F′의 좌표는 각각

$(4, 0)$, $(-4, 0)$

$\therefore \overline{FF'}=8$

$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$a+b=2\times 5=10$ …… ㉠

한편, $\overline{FF'}$은 원의 지름이고, 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로

$\angle FPF'=90^\circ$

즉, 삼각형 PF′F는 $\angle FPF'=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=8^2$

$\therefore (a+b)^2-2ab=64$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

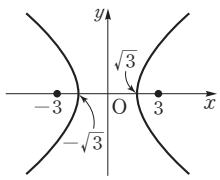
$10^2-2ab=64$ $\quad\therefore ab=18$

따라서 삼각형 PF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{PF}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times 18=9$ **답 9**

35

답 6, 3, (3, 0), (−3, 0), $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$



36

(1) 쌍곡선의 한 초점의 좌표를 $(c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

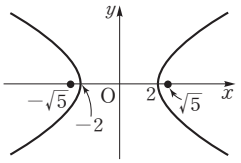
$c=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

따라서 **초점의 좌표**는 $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$,

꼭짓점의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$,

주축의 길이는 $2\times 2=4$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $x^2-2y^2=-12$에서 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}=-1$

쌍곡선의 한 초점의 좌표를 $(0, c)$ $(c>0)$라 하면

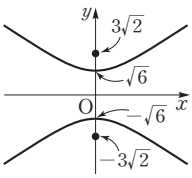
$c=\sqrt{12+6}=3\sqrt{2}$

따라서 **초점의 좌표**는 $\mathbf{(0, 3\sqrt{2}), (0, -3\sqrt{2})}$,

꼭짓점의 좌표는 $\mathbf{(0, \sqrt{6}), (0, -\sqrt{6})}$,

주축의 길이는 $2\times\sqrt{6}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

37

(1) 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$을 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$의

초점의 좌표는 $(3\sqrt{5}, 0)$, $(-3\sqrt{5}, 0)$, ← $\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

꼭짓점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$

이므로 구하는 쌍곡선의

초점의 좌표는 $(3\sqrt{5}, 3)$, $(-3\sqrt{5}, 3)$,

꼭짓점의 좌표는 $(3, 3)$, $(-3, 3)$

(2) $-5(x+1)^2+4(y-1)^2=20$에서

$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=-1$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=-1$의

초점의 좌표는 $(0, 3)$, $(0, -3)$, ← $\sqrt{4+5}=3$

꼭짓점의 좌표는 $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$

이므로 구하는 쌍곡선의

초점의 좌표는 $(-1, 4)$, $(-1, -2)$,

꼭짓점의 좌표는 $(-1, \sqrt{5}+1)$, $(-1, -\sqrt{5}+1)$

답 (1) **초점의 좌표: $(3\sqrt{5}, 3)$, $(-3\sqrt{5}, 3)$**

꼭짓점의 좌표: $(3, 3)$, $(-3, 3)$

(2) **초점의 좌표: $(-1, 4)$, $(-1, -2)$**

꼭짓점의 좌표: $(-1, \sqrt{5}+1)$, $(-1, -\sqrt{5}+1)$

38

(1) 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{4}{6}x$ $\therefore y=\pm\frac{2}{3}x$

(2) 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=-1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=-1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{5}{2}x$

이므로 구하는 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y-3=\pm\frac{5}{2}(x+2)$

$\therefore y=\frac{5}{2}x+8$, $y=-\frac{5}{2}x-2$

답 (1) $\boldsymbol{y=\pm\frac{2}{3}x}$

(2) $\boldsymbol{y=\frac{5}{2}x+8}$, $\boldsymbol{y=-\frac{5}{2}x-2}$

39

두 초점이 y축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0, b>0)$

이라 하면 $a^2+b^2=2^2$에서 $b^2=2^2-a^2$ …… ㉠

또, 쌍곡선이 점 $(2, \sqrt{6})$을 지나므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{6}{b^2}=-1$

$\therefore 6a^2-4b^2=a^2b^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6a^2-4(4-a^2)=a^2(4-a^2)$

$a^4+6a^2-16=0$, $(a^2+8)(a^2-2)=0$

$\therefore a^2=2$ ($\because a^2>0$)

$a^2=2$를 ㉠에 대입하면 $b^2=2$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=-1$ **답** $\boldsymbol{\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=-1}$

40

두 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$)

이라 하자. 주축의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$2a=2\sqrt{2}$ $\therefore a=\sqrt{2}$

$a^2+b^2=3^2$에서 $b^2=3^2-(\sqrt{2})^2=7$

$\therefore \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$

이 쌍곡선이 점 $(k, 7)$을 지나므로

$\frac{k^2}{2}-\frac{7^2}{7}=1$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$) **답 4**

41

두 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$)

이라 하면 $a^2+b^2=(2\sqrt{3})^2=12$ …… ㉠

또, 점근선의 방정식이 $y=\pm\sqrt{3}x$이므로

$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$ $\therefore b=\sqrt{3}a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=3$, $b^2=9$

$\therefore \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$ **답** $\boldsymbol{\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1}$

42

$a>0$, $b>0$이라 하면 주축의 길이가 4이므로

$2b=4$ $\therefore b=2$ …… ㉠

또, 한 점근선의 방정식이 $y=2x$이므로

$\frac{b}{a}=2$ $\therefore b=2a$ …… ㉡

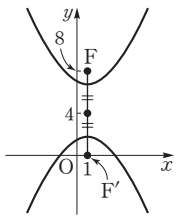
㉠을 ㉡에 대입하면 $a=1$

$\therefore a^2+b^2=1+4=5$ **답 5**

43

쌍곡선의 중심은 선분 FF′의 중점이므로

$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{8+0}{2}\right)$, 즉 $(1, 4)$



이때 두 초점이 y축과 평행한 직선 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-4)^2}{b^2}=-1$ ($a>0$, $b>0$)

이라 하자.

거리의 차가 6이므로

$2b=6$ $\therefore b=3$

또한, 중심에서 초점까지의 거리가 4이므로

$a^2+b^2=4^2$에서 $a^2=4^2-3^2=7$

$\therefore \frac{(x-1)^2}{7}-\frac{(y-4)^2}{9}=-1$

답 $\boldsymbol{\frac{(x-1)^2}{7}-\frac{(y-4)^2}{9}=-1}$

다른풀이 쌍곡선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=6$이므로

$|\sqrt{(x-1)^2+(y-8)^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}|=6$

$\sqrt{(x-1)^2+(y-8)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\pm6$

양변을 제곱하여 정리하면

$-4y+7=\pm3\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

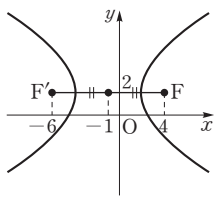
다시 양변을 제곱하여 정리하면

$9(x-1)^2-7(y-4)^2=-63$

$\therefore \frac{(x-1)^2}{7}-\frac{(y-4)^2}{9}=-1$

44

점 P가 나타내는 도형은 두 점 $F(4, 2)$, $F'(-6, 2)$에서의 거리의 차가 8인 쌍곡선이고, 두 점 F, F′은 쌍곡선의 초점이다.



쌍곡선의 중심은 선분 FF′의 중점이므로

$\left(\frac{4-6}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$, 즉 $(-1, 2)$

이때 두 초점이 x축과 평행한 직선 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{(x+1)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$

이라 하자.

거리의 차가 8이므로

$2a=8 \qquad \therefore a=4$

또한, 중심에서 초점까지의 거리가 5이므로

$a^2+b^2=5^2$에서 $b^2=5^2-4^2=9$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$

답 $\boldsymbol{\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1}$

45

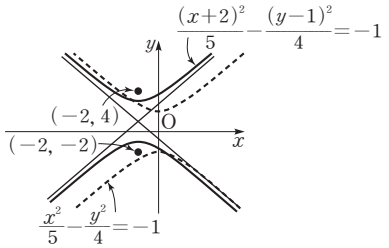
주어진 식에서

$4(x+2)^2-5(y-1)^2=-20$

양변을 20으로 나누면

$\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{(y-1)^2}{4}=-1$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$의

초점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$, ← $\sqrt{5+4}=3$

꼭짓점의 좌표는 $(0, 2), (0, -2)$,

중심의 좌표는 $(0, 0)$,

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$, 즉 $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$

이므로 구하는 쌍곡선의

초점의 좌표는 $\boldsymbol{(-2, 4), (-2, -2)}$,

꼭짓점의 좌표는 $\boldsymbol{(-2, 3), (-2, -1)}$,

중심의 좌표는 $\boldsymbol{(-2, 1)}$,

주축의 길이는 $2\times2=\boldsymbol{4}$

점근선의 방정식은 $y-1=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}(x+2)$, 즉

$\boldsymbol{y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{4\sqrt{5}}{5}+1,\ y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x-\frac{4\sqrt{5}}{5}+1}$

답 **풀이 참조**

46

주어진 식에서 $(x-1)^2-8y^2=8$

$\therefore \frac{(x-1)^2}{8}-y^2=1$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$의 초점의 좌표는

$(3, 0), (-3, 0)$ ← $\sqrt{8+1}=3$

이므로 구하는 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(4, 0), (-2, 0)$

따라서 $a=4$, $b=-2$ ($\because a>b$)이므로

$ab=-8$

답 -8

47

주어진 식에서 $3(x+3)^2-(y-2)^2=-3$

$\therefore (x+3)^2-\frac{(y-2)^2}{3}=-1$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=-1$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

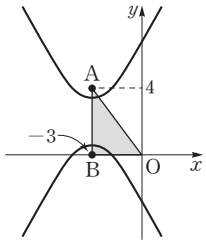
이때 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=-1$의 초점의 좌표는

$(0, 2), (0, -2)$ ← $\sqrt{1+3}=2$

이므로 구하는 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(-3, 4), (-3, 0)$

오른쪽 그림과 같이
A(−3, 4), B(−3, 0)이라 하면
$\overline{AB}=4$
따라서 삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times4\times3=6$



답 6

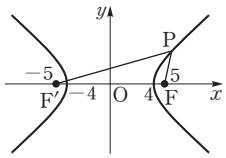
48

쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{AF'}-\overline{AF}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ …… ㉠
$\overline{BF'}-\overline{BF}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$\overline{AF'}-\overline{AF}+\overline{BF'}-\overline{BF}=4\sqrt{3}$
$\overline{AF'}+\overline{BF'}-(\overline{AF}+\overline{BF})=4\sqrt{3}$
$\overline{AF'}+\overline{BF'}-\overline{AB}=4\sqrt{3}$
이때 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$이므로
$\overline{AF'}+\overline{BF'}-4\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
$\therefore \overline{AF'}+\overline{BF'}=8\sqrt{3}$

답 $8\sqrt{3}$

49

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$에서
$\sqrt{16+9}=5$이므로 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하면
F(5, 0), F′(−5, 0)
$\therefore \overline{FF'}=10$
쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{PF'}-\overline{PF}=2\times4=8$
이때 $\overline{PF'}=2\overline{PF}$이므로
$\overline{PF'}=2k$, $\overline{PF}=k$ $(k>0)$
라 하면
$\overline{PF'}-\overline{PF}=2k-k=8$ $\therefore k=8$
$\therefore \overline{PF'}=16$, $\overline{PF}=8$
따라서 삼각형 PFF′의 둘레의 길이는
$\overline{PF'}+\overline{PF}+\overline{FF'}=16+8+10=34$



답 34

50

(1) x^2항과 xy항이 없으므로 포물선이다.
(2) x^2항과 y^2항의 계수의 곱이 양수이고 서로 다르므로 타원이다.

답 (1) 포물선 (2) 타원

다른풀이 (1) $y^2+12x+6y-3=0$에서
$(y+3)^2=-12(x-1)$
따라서 주어진 방정식은 포물선 $y^2=-12x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 −3만큼 평행이동한 포물선을 나타낸다.
(2) $3x^2+2y^2-12x+4y-4=0$에서
$3(x-2)^2+2(y+1)^2=18$
$\therefore \frac{(x-2)^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$
따라서 주어진 방정식은 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 타원을 나타낸다.

51

(1) 타원을 나타내려면 x^2항과 y^2항의 계수의 곱이 양수이고 서로 달라야 하므로
$2k>0$, $k\neq2$
$\therefore 0<k<2$ 또는 $k>2$
(2) 쌍곡선을 나타내려면 x^2항과 y^2항의 계수의 곱이 음수이어야 하므로
$2k<0$ $\therefore k<0$

답 (1) $0<k<2$ 또는 $k>2$ (2) $k<0$

52

$x+2y-2=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x+1$ …… ㉠
(1) ㉠을 $x^2=2y$에 대입하면
$x^2=2\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$
$\therefore x^2+x-2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times1\times(-2)=9>0$
따라서 주어진 이차곡선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) ㉠을 $x^2+4y^2=2$에 대입하면

$x^2+4\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2=2$

$\therefore x^2-2x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1=0$

따라서 주어진 이차곡선과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) ㉠을 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=-1$에 대입하면

$\frac{x^2}{4}-\frac{\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2}{3}=-1$

$\therefore x^2+2x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-4=-3<0$

따라서 주어진 이차곡선과 직선은 만나지 않는다.

답 (1) **서로 다른 두 점에서 만난다.**
(2) **한 점에서 만난다. (접한다.)**
(3) **만나지 않는다.**

53

$y=3x$를 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=-1$에 대입하면

$\frac{x^2}{2}-\frac{(3x)^2}{2}=-1$

$4x^2-1=0,\ (2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

이것을 $y=3x$에 대입하면

$y=-\frac{3}{2}$ 또는 $y=\frac{3}{2}$

따라서 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^2}$

$=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

54

$y=x+k$를 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{2}-(x+k)^2=1$

$\therefore x^2+4kx+2k^2+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(2k^2+2)$

$=2k^2-2=2(k+1)(k-1)$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이므로

$2(k+1)(k-1)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>1$

(2) 접하면 $D=0$이므로

$2(k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=1$

(3) 만나지 않으면 $D<0$이므로

$2(k+1)(k-1)<0$

$\therefore -1<k<1$

답 (1) $\boldsymbol{k<-1}$ **또는** $\boldsymbol{k>1}$
(2) $\boldsymbol{k=-1}$ **또는** $\boldsymbol{k=1}$
(3) $\boldsymbol{-1<k<1}$

55

$y=x-3$을 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{3}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{a}+\frac{(x-3)^2}{3}=1$

$\therefore (a+3)x^2-6ax+6a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3a)^2-(a+3)\times 6a=0$

$3a^2-18a=0,\ 3a(a-6)=0$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

답 **6**

56

(i) $y=-x+m$을 $x^2=-y$에 대입하면

$x^2=-(-x+m)$ $\quad\therefore x^2-x+m=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4m<0$ $\quad\therefore m>\frac{1}{4}$

(ii) $y=2x+m$을 $x^2=-y$에 대입하면

$x^2=-(2x+m)$ $\therefore x^2+2x+m=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-m>0$ $\therefore m<1$

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는

$\frac{1}{4}<m<1$ **답** $\frac{1}{4}<m<1$

57

(1) $y^2=12x=4\times3x$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=2x+\frac{3}{2}$

(2) $y^2=-2x=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)x$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{5}x+\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}$ $\therefore y=\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}$

답 (1) $y=2x+\frac{3}{2}$ (2) $y=\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}$

58

(1) $y^2=-8x=4\times(-2)x$이므로 구하는 접선의 방정식은

$-4y=2\times(-2)\times(x-2)$ $\therefore y=x-2$

(2) $x^2=12y=4\times3y$이므로 구하는 접선의 방정식은

$-6x=2\times3\times(y+3)$ $\therefore y=-x-3$

(3) $y^2=3x=4\times\frac{3}{4}x$이므로 구하는 접선의 방정식은

$-3y=2\times\frac{3}{4}\times(x+3)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

(4) $\frac{1}{2}x^2=-4y$에서 $x^2=-8y=4\times(-2)y$이므로 구하는 접선의 방정식은

$4x=2\times(-2)\times(y-2)$

$\therefore y=-x+2$

답 (1) $y=x-2$ (2) $y=-x-3$

(3) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ (4) $y=-x+2$

59

답 $-\frac{1}{2}(x+x_1)$, $-\frac{1}{2}(1+x_1)$, -1, -1, 1, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

60

직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 포물선 $y^2=-8x=4\times(-2)x$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{-2}{\frac{1}{2}}$ $\therefore y=\frac{1}{2}x-4$

이 직선이 점 $(-2, k)$를 지나므로

$k=\frac{1}{2}\times(-2)-4=-5$ **답** -5

참고 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

61

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이므로 포물선 $y^2=\frac{1}{3}x=4\times\frac{1}{12}x$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x+\frac{1}{12}$ $\therefore 12x-12y+1=0$

따라서 $a=12$, $b=-12$이므로

$a-b=24$ **답** 24

62

직선 $y=-x+2$와 평행한 직선의 기울기는 -1이므로 포물선 $y^2=-6x=4\times\left(-\frac{3}{2}\right)x$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x+\frac{3}{2}$

따라서 $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$ 답 $\frac{9}{8}$

63

점 (6, 3)이 포물선 $\frac{x^2}{k}=y$ 위의 점이므로

$\frac{6^2}{k}=3$ $\therefore k=12$

따라서 포물선 $\frac{x^2}{12}=y$, 즉 $x^2=12y=4\times3y$ 위의 점 (6, 3)에서의 접선의 방정식은

$6x=2\times3\times(y+3)$ $\therefore y=x-3$

답 $y=x-3$

64

포물선 $y^2=6x=4\times\frac{3}{2}x$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

또, 점 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\sqrt{3}y=2\times\frac{3}{2}\times\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$\therefore 6x-2\sqrt{3}y+3=0$

따라서 구하는 거리는

$\frac{\left|6\times\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\times0+3\right|}{\sqrt{6^2+(-2\sqrt{3})^2}}=\frac{12}{4\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

KEY Point

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리

⇨ $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

65

포물선 $y^2=-4x=4\times(-1)x$의 초점의 좌표는 $(-1, 0)$

점 $(-2, 2\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$2\sqrt{2}y=2\times(-1)\times(x-2)$

$\therefore y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$이다.

이때 기울기가 $\sqrt{2}$이고 점 $(-1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{2}(x+1)$ $\therefore y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$

따라서 구하는 y절편은 $\sqrt{2}$이다. 답 $\sqrt{2}$

66

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 포물선 $x^2=-2y=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)y$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(y+y_1)$

$\therefore y=-x_1x-y_1$

이 직선이 점 (0, 2)를 지나므로

$2=-y_1$ $\therefore y_1=-2$ ····· ㉠

또, 점 (x_1, y_1)이 포물선 $x^2=-2y$ 위의 점이므로

$x_1^2=-2y_1$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면

$x_1=-2$, $y_1=-2$ 또는 $x_1=2$, $y_1=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x+2$, $y=2x+2$

답 $y=-2x+2$, $y=2x+2$

다른풀이 1 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx+\frac{m^2}{2}$

이 직선이 점 (0, 2)를 지나므로

$2=\frac{m^2}{2}$, $m^2=4$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x+2$, $y=2x+2$

다른풀이 2 점 (0, 2)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-2=m(x-0)$ $\therefore y=mx+2$

이것을 $x^2=-2y$에 대입하면

$x^2=-2(mx+2)$

$x^2+2mx+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^2-4=0$

$m^2=4$ $\therefore m=-2$ 또는 $m=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x+2$, $y=2x+2$

67

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 포물선 $y^2=-4x=4\times(-1)x$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2\times(-1)\times(x+x_1)$

$\therefore y_1y=-2x-2x_1$

이 직선이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$y_1=-4-2x_1$ …… ㉠

또, 점 (x_1, y_1)이 포물선 $y^2=-4x$ 위의 점이므로

$y_1^2=-4x_1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-4-2x_1)^2=-4x_1$

$x_1^2+5x_1+4=0$, $(x_1+4)(x_1+1)=0$

$\therefore x_1=-4$ 또는 $x_1=-1$

㉠에서 $x_1=-4$일 때 $y_1=4$, $x_1=-1$일 때 $y_1=-2$이므로 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+2$, $y=x-1$

(i) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$가 점 $(4, k)$를 지날 때

$k=-2+2=0$

(ii) 직선 $y=x-1$이 점 $(4, k)$를 지날 때

$k=4-1=3$

(i), (ii)에서 실수 k의 값은 0, 3이다. **답 0, 3**

68

(1) $y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{9\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+5}$

$\therefore y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{6}$

(2) $4x^2+3y^2=12$에서 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x\pm\sqrt{3\times(-2)^2+4}$

$\therefore y=-2x\pm4$

답 (1) $\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{6}}$ (2) $\boldsymbol{y=-2x\pm4}$

69

(1) $\frac{-2x}{8}+\frac{y}{2}=1$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+2$

(2) $\frac{\sqrt{6}x}{10}+\frac{\sqrt{2}y}{5}=1$ $\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(3) $4x+4y=20$ $\therefore y=-x+5$

(4) $2x-2y=6$ $\therefore y=x-3$

답 (1) $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+2}$ (2) $\boldsymbol{y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\boldsymbol{y=-x+5}$ (4) $\boldsymbol{y=x-3}$

70

답 $\boldsymbol{x_1x}$, $\boldsymbol{y_1y}$, $\boldsymbol{2x_1}$, $\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$, $\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$, $\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{2x-3}$

71

직선 $x-y+4=0$, 즉 $y=x+4$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 타원 $x^2+2y^2=6$, 즉 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{6\times(-1)^2+3}$

$\therefore y=-x\pm3$ **답** $\boldsymbol{y=-x\pm3}$

72

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$이므로

$a=2$ ($\because a>0$)

이때 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x\pm\sqrt{4\times(-2)^2+b^2}$

$\therefore y=-2x\pm\sqrt{16+b^2}$

즉, 직선 $y=-2x+\sqrt{16+b^2}$이 직선 $y=-2x+5$와 일치하므로

$\sqrt{16+b^2}=5$

양변을 제곱하면

$16+b^2=25$, $b^2=9$ $\therefore b=3$ ($\because b>0$)

$\therefore ab=2\times3=6$ **답 6**

73

타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{5\times1^2+4}$ $\therefore y=x\pm3$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=x+3$ 위의 점 $(0, 3)$과 직선 $y=x-3$, 즉 $x-y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-3-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$ **답 $3\sqrt{2}$**

74

점 $(\sqrt{2}, 1)$이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{2}{a}+\frac{1}{2}=1$ $\therefore a=4$

이때 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $(\sqrt{2}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{2}x}{4}+\frac{y}{2}=1$ $\therefore y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$

이 직선의 y절편이 2이므로 $b=2$

$\therefore ab=4\times2=8$ **답 8**

75

타원 $3x^2+4y^2=48$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 방정식은

$3\times2x+4\times3y=48$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+4$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 2이다.

따라서 기울기가 2이고 점 $(3, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=2(x-3)$

$\therefore y=2x-2$ **답 $y=2x-2$**

76

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{3x}{12}+\frac{y}{4}=1$ $\therefore y=-x+4$

이 직선의 x절편은 4, y절편은 4이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$ **답 8**

77

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 타원 $x^2+6y^2=6$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x+6y_1y=6$

이 직선이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$2x_1+6y_1=6$ $\therefore y_1=-\frac{1}{3}x_1+1$ …… ㉠

또, 점 (x_1, y_1)이 타원 $x^2+6y^2=6$ 위의 점이므로

$x_1^2+6y_1^2=6$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x_1^2+6\left(-\frac{1}{3}x_1+1\right)^2=6$, $5x_1^2-12x_1=0$

$x_1(5x_1-12)=0$ $\therefore x_1=0$ 또는 $x_1=\frac{12}{5}$

㉠에서 $x_1=0$일 때 $y_1=1$, $x_1=\frac{12}{5}$일 때 $y_1=\frac{1}{5}$이므로 접선의 방정식은

$y=1$, $y=-2x+5$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 1, 5이므로 그 합은

$1+5=6$ **답 6**

다른풀이 점 $(2, 1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-1=m(x-2)$ $\therefore y=mx-2m+1$

이것을 $x^2+6y^2=6$에 대입하면

$x^2+6(mx-2m+1)^2=6$

$\therefore (6m^2+1)x^2-12m(2m-1)x+24m^2-24m=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-6m(2m-1)\}^2$

$-(6m^2+1)\times(24m^2-24m)=0$

$m^2+2m=0,\ m(m+2)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=0$

따라서 접선의 방정식은

$y=-2x+5,\ y=1$

이므로 두 접선의 y절편의 합은

$5+1=6$

78

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{16}+\frac{y_1y}{4}=1$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(4,\ 1)$을 지나므로

$\frac{4x_1}{16}+\frac{y_1}{4}=1 \qquad \therefore y_1=-x_1+4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 점 $(x_1,\ y_1)$이 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로

$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{x_1^2}{16}+\frac{(-x_1+4)^2}{4}=1,\ 5x_1^2-32x_1+48=0$

$(5x_1-12)(x_1-4)=0$

$\therefore x_1=\frac{12}{5}$ 또는 $x_1=4$

㉠에서 $x_1=\frac{12}{5}$일 때 $y_1=\frac{8}{5}$, $x_1=4$일 때 $y_1=0$이다.

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{12}{5},\ \frac{8}{5}\right)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$이라 하면 삼각형 PAB의 무게중심의 y좌표는

$\frac{1+\frac{8}{5}+0}{3}=\frac{13}{15}$

답 $\frac{13}{15}$

79

(1) $2x^2-y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$4x-2y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y}$ (단, $y\neq0$)

이때 주어진 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{-4}{2}=-2$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-2(x+2) \qquad \therefore y=-2x-2$

(2) $x^2-y=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=2x$

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 4이므로

$2x_1=4 \qquad \therefore x_1=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또, 점 $(x_1,\ y_1)$이 포물선 $x^2-y=0$ 위의 점이므로

$x_1^2-y_1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4-y_1=0 \qquad \therefore y_1=4$

따라서 점 $(2,\ 4)$를 지나고 기울기가 4인 직선의 방정식은

$y-4=4(x-2) \qquad \therefore y=4x-4$

답 (1) $\boldsymbol{y=-2x-2}$ (2) $\boldsymbol{y=4x-4}$

80

(1) $y=-x\pm\sqrt{5\times(-1)^2-4}$

$\therefore y=-x\pm1$

(2) $y=\frac{1}{4}x\pm\sqrt{9-16\times\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

$\therefore y=\frac{1}{4}x\pm2\sqrt{2}$

답 (1) $\boldsymbol{y=-x\pm1}$ (2) $\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x\pm2\sqrt{2}}$

81

(1) $\frac{-4x}{8}-\frac{-\sqrt{2}y}{2}=1 \qquad \therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$

(2) $-\frac{2y}{4}=-1 \qquad \therefore y=2$

(3) $2x-y=3 \qquad \therefore y=2x-3$

(4) $2\times(-2x)-9y=-1$ $\therefore y=-\frac{4}{9}x+\frac{1}{9}$

답 (1) $\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}}$ (2) $\boldsymbol{y=2}$

(3) $\boldsymbol{y=2x-3}$ (4) $\boldsymbol{y=-\frac{4}{9}x+\frac{1}{9}}$

82

답 $\boldsymbol{x_1x,\ y_1y,\ 3x_1,\ 4y_1,\ -5,\ 3,\ 0,\ \frac{5}{6}x+\frac{3}{2},\ 3}$

참고 위의 문제와 같이 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 꼴의 쌍곡선 밖의 점의 x좌표가 꼭짓점의 x좌표와 같은 경우 판별식을 이용하여 풀면 두 접선의 방정식을 구할 수 없다.
따라서 그림을 그려 확인하고 접선의 방정식을 구해야 한다.

83

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이므로 쌍곡선 $2x^2-y^2+4=0$, 즉 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=-1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{4-2\times1^2}$

$\therefore y=x\pm\sqrt{2}$ **답** $\boldsymbol{y=x\pm\sqrt{2}}$

84

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{a}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5\times2^2-a}$ $\therefore y=2x\pm\sqrt{20-a}$

즉, 직선 $y=2x+\sqrt{20-a}$가 직선 $y=2x+4$와 일치하므로

$\sqrt{20-a}=4$

양변을 제곱하면 $20-a=16$ $\therefore a=4$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$에서 $\sqrt{5+4}=3$이므로 두 초점의 좌표는 $(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$3-(-3)=6$ **답** 6

85

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{9\times2^2-16}$

$\therefore y=2x\pm2\sqrt{5}$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=2x+2\sqrt{5}$ 위의 점 $(0,\ 2\sqrt{5})$와 직선 $y=2x-2\sqrt{5}$, 즉 $2x-y-2\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-2\sqrt{5}-2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=4$ **답** 4

86

점 $(2,\ a)$가 쌍곡선 $-x^2+2y^2=10$ 위의 점이므로

$-4+2a^2=10$ $\therefore a^2=7$

이때 쌍곡선 $-x^2+2y^2=10$ 위의 점 $(2,\ a)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+2ay=10$

이 직선이 점 $(b,\ 0)$을 지나므로

$-2b=10$ $\therefore b=-5$

$\therefore a^2+b^2=7+(-5)^2=32$ **답** 32

87

쌍곡선 $2x^2-y^2=-18$ 위의 점 $(3,\ -6)$에서의 접선의 방정식은

$2\times3x-(-6y)=-18$

$\therefore y=-x-3$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 1이다.

따라서 기울기가 1이고 점 $(2,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=x-2$ $\therefore y=x+3$ **답** $\boldsymbol{y=x+3}$

88

쌍곡선 $x^2-4y^2=12$ 위의 점 $(4,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$4x-4y=12$ $\therefore y=x-3$

이 직선의 x절편은 3, y절편은 -3이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$ **답 $\frac{9}{2}$**

89

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 쌍곡선 $3x^2-y^2=-9$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$3x_1x-y_1y=-9$

이 직선이 점 $(0, \sqrt{3})$을 지나므로

$-\sqrt{3}y_1=-9$ $\therefore y_1=3\sqrt{3}$ …… ㉠

또, 점 (x_1, y_1)이 쌍곡선 $3x^2-y^2=-9$ 위의 점이므로

$3x_1^{\,2}-y_1^{\,2}=-9$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면

$x_1=\sqrt{6}$, $y_1=3\sqrt{3}$ 또는 $x_1=-\sqrt{6}$, $y_1=3\sqrt{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{2}x+\sqrt{3}$

답 $y=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{2}x+\sqrt{3}$

다른풀이 점 $(0, \sqrt{3})$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-\sqrt{3}=mx$ $\therefore y=mx+\sqrt{3}$

이것을 $3x^2-y^2=-9$에 대입하면

$3x^2-(mx+\sqrt{3})^2=-9$

$\therefore (m^2-3)x^2+2\sqrt{3}mx-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{3}m)^2-(m^2-3)\times(-6)=0$

$9m^2-18=0$, $m^2=2$ $\therefore m=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{2}x+\sqrt{3}$

90

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 쌍곡선 $x^2-4y^2=4$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x-4y_1y=4$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$x_1=4$ …… ㉠

또, 점 (x_1, y_1)이 쌍곡선 $x^2-4y^2=4$ 위의 점이므로

$x_1^{\,2}-4y_1^{\,2}=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$16-4y_1^{\,2}=4$, $y_1^{\,2}=3$ $\therefore y_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 $\mathrm{P}(4, \sqrt{3})$, $\mathrm{Q}(4, -\sqrt{3})$이라 하면 선분 PQ의 길이는

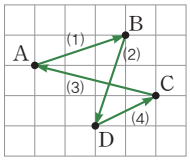
$\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$ **답 $2\sqrt{3}$**

Ⅱ. 평면벡터

91

답 (1) 시점: O, 종점: B
(2) 시점: D, 종점: C

92

답 

93

(1) $|\overrightarrow{BC}|=\overline{BC}=4$
(2) $\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$
$\therefore |\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=5$

답 (1) **4** (2) **5**

94

답 (1) $\vec{h}$ (2) $\vec{f}$ (3) $\vec{g}$ (4) $\vec{d}$

95

ㄱ. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{c}$
ㄴ. $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-\vec{b}$
ㄷ. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

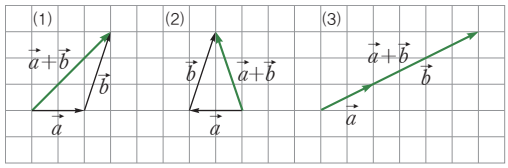
답 ㄱ, ㄴ

96

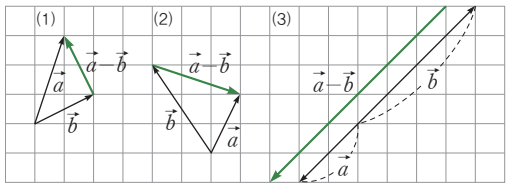
(1) $\overrightarrow{AD}$와 크기와 방향이 각각 같은 벡터는
$\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{FE}$
(2) $\overrightarrow{BE}$와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는
$\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FD}$
(3) 선분 DE의 길이는 선분 AC의 길이의 $\frac{1}{2}$배이므로
$|\overrightarrow{DE}|=\overline{DE}=1$

답 (1) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{FE}$ (2) $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FD}$ (3) **1**

97

답 

98

답 

99

답 (1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{CA}$ (3) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ (4) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$

100

(1) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}$
$=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}$ (교환법칙)
$=\overrightarrow{BD}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})$ (결합법칙)
$=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{BA}$
(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$ (교환법칙)
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})$ (결합법칙)
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$
$=\overrightarrow{AE}$
(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}$ (교환법칙)
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})$ (결합법칙)
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}$
$=\vec{0}$

답 (1) $\overrightarrow{BA}$ (2) $\overrightarrow{AE}$ (3) $\vec{0}$

101

(1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$
$=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CB}$
$=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$
$=\overrightarrow{DB}$

(2) (좌변)$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$
$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{BC}$

(우변)$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}$
$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{BA}$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$
$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

답 풀이 참조

102

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$
$=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$
$=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\vec{a}-\vec{b}$

답 (1) $-\vec{a}+\vec{b}$ (2) $-\vec{a}-\vec{b}$

다른풀이 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OA}$
$=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}-\vec{b}$

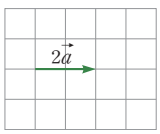
103

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$
$=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

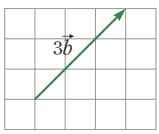
답 풀이 참조

104

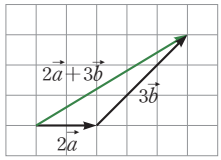
(1)



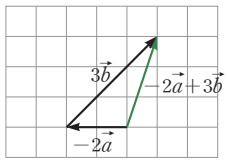
(2)



(3)



(4)



답 풀이 참조

105

(1) $3(2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})-(6\vec{a}+5\vec{b}-\vec{c})$
$=6\vec{a}+3\vec{b}-9\vec{c}-6\vec{a}-5\vec{b}+\vec{c}$
$=(6-6)\vec{a}+(3-5)\vec{b}+(-9+1)\vec{c}$
$=-2\vec{b}-8\vec{c}$

(2) $\frac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})-\frac{3}{2}(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$
$=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{a}+3\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}$
$=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\vec{a}+(1+3)\vec{b}-\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)\vec{c}$
$=-\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$

답 (1) $-2\vec{b}-8\vec{c}$ (2) $-\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$

106

두 벡터의 방향이 같거나 반대이면 두 벡터가 서로 평행하다고 한다.
따라서 $\vec{p}$와 평행한 벡터는 $\vec{b}$, $\vec{c}$이다.

답 $\vec{b}$, $\vec{c}$

107

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\vec{a}-\vec{b}$
$\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{OC}=-2\vec{b}$
$\therefore \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=(\vec{a}-\vec{b})+(-2\vec{b})$
$=\vec{a}-3\vec{b}$

답 $\vec{a}-3\vec{b}$

108

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이므로

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$

$=2(\vec{b}-\vec{a})+(-\vec{a})$

$=-3\vec{a}+2\vec{b}$ **답 ②**

109

(1) $3(\vec{a}+\vec{b}+\vec{x})=2(3\vec{b}-2\vec{a})+2\vec{x}$에서

$3\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{x}=6\vec{b}-4\vec{a}+2\vec{x}$

$\therefore \vec{x}=-7\vec{a}+3\vec{b}$

(2) $4(\vec{x}-\vec{a}+2\vec{b})=3\left(2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right)-\vec{x}$에서

$4\vec{x}-4\vec{a}+8\vec{b}=6\vec{a}-2\vec{b}-\vec{x}$

$5\vec{x}=10\vec{a}-10\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=2\vec{a}-2\vec{b}$

답 (1) $\vec{x}=-7\vec{a}+3\vec{b}$ (2) $\vec{x}=2\vec{a}-2\vec{b}$

110

$2\vec{x}-\vec{y}=-\vec{a}$ …… ㉠

$-3\vec{x}+2\vec{y}=-\vec{b}$ …… ㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면 $\vec{x}=-2\vec{a}-\vec{b}$

이것을 ㉠에 대입하면

$-4\vec{a}-2\vec{b}-\vec{y}=-\vec{a}$

$\therefore \vec{y}=-3\vec{a}-2\vec{b}$

답 $\vec{x}=-2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{y}=-3\vec{a}-2\vec{b}$

111

$2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$ …… ㉠

$3\vec{x}-5\vec{y}=\vec{b}$ …… ㉡

㉠$\times 3-$㉡$\times 2$를 하면 $\vec{y}=3\vec{a}-2\vec{b}$

이것을 ㉠에 대입하면

$2\vec{x}-9\vec{a}+6\vec{b}=\vec{a}$, $2\vec{x}=10\vec{a}-6\vec{b}$

$\therefore \vec{x}=5\vec{a}-3\vec{b}$

$\therefore \vec{x}-3\vec{y}=(5\vec{a}-3\vec{b})-3(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=5\vec{a}-3\vec{b}-9\vec{a}+6\vec{b}$

$=-4\vec{a}+3\vec{b}$ **답** $-4\vec{a}+3\vec{b}$

112

$(3x+y-7)\vec{a}+(2x-y-8)\vec{b}=\vec{0}$에서

$3x+y-7=0$ …… ㉠

$2x-y-8=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=-2$

$\therefore x+y=1$ **답 1**

113

$(3k+2l)\vec{a}+(k-l-2)\vec{b}=(k-l)\vec{a}+(l+5)\vec{b}$

에서

$3k+2l=k-l$, $k-l-2=l+5$

$\therefore 2k+3l=0$, $k-2l=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=3$, $l=-2$

$\therefore k-l=5$ **답 5**

다른풀이 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하여 간단히 하면

$(2k+3l)\vec{a}+(k-2l-7)\vec{b}=\vec{0}$

$\therefore 2k+3l=0$, $k-2l-7=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=3$, $l=-2$ $\therefore k-l=5$

114

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(2\vec{a}+k\vec{b})-\vec{b}$

$=2\vec{a}+(k-1)\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$

이때 $4\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{BA}$에서

$4\{2\vec{a}+(k-1)\vec{b}\}=m(\vec{a}-\vec{b})$

$8\vec{a}+4(k-1)\vec{b}=m\vec{a}-m\vec{b}$

따라서 $8=m$, $4(k-1)=-m$이므로

$m=8$, $k=-1$

$\therefore m+2k=8+2\times(-1)=6$ **답 6**

115

두 벡터 $\vec{p}=4\vec{a}-6\vec{b}$와 $\vec{q}=2\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수 m에 대하여

$4\vec{a}-6\vec{b}=m(2\vec{a}+k\vec{b})$

$\therefore 4\vec{a}-6\vec{b}=2m\vec{a}+km\vec{b}$

따라서 $4=2m$, $-6=km$이므로

$m=2$, $k=-3$ **답 -3**

116

두 벡터 $\vec{p}-\vec{q}$와 $\vec{q}+\vec{r}$가 서로 평행하려면

$\vec{p}-\vec{q}=m(\vec{q}+\vec{r})$ …… ㉠

를 만족시키는 0이 아닌 실수 m이 존재해야 한다.

이때

$\vec{p}-\vec{q}=(9\vec{a}-3\vec{b})-(2\vec{a}+k\vec{b})$

$=7\vec{a}-(k+3)\vec{b}$

$\vec{q}+\vec{r}=(2\vec{a}+k\vec{b})+(-8\vec{a}+2\vec{b})$

$=-6\vec{a}+(k+2)\vec{b}$

이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$7\vec{a}-(k+3)\vec{b}=m\{-6\vec{a}+(k+2)\vec{b}\}$

$\therefore 7\vec{a}-(k+3)\vec{b}=-6m\vec{a}+m(k+2)\vec{b}$

따라서 $7=-6m$, $-(k+3)=m(k+2)$이므로

$m=-\frac{7}{6}$, $k=4$ **답 4**

다른풀이 $(\vec{p}-\vec{q})/\!/(\vec{q}+\vec{r})$이므로

$\vec{p}-\vec{q}=7\vec{a}-(k+3)\vec{b}$와 $\vec{q}+\vec{r}=-6\vec{a}+(k+2)\vec{b}$에서 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 계수의 비가 같다.

즉, $\frac{7}{-6}=\frac{-(k+3)}{k+2}$이므로 $k=4$

117

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

즉, $(m+1)\vec{a}+3\vec{b}=k(2\vec{a}-\vec{b})$에서

$(m+1)\vec{a}+3\vec{b}=2k\vec{a}-k\vec{b}$

따라서 $m+1=2k$, $3=-k$이므로

$k=-3$, $m=-7$ **답 -7**

118

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ …… ㉠

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

이때

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}+m\vec{b})-\vec{a}$

$=2\vec{a}+m\vec{b}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$2\vec{a}+m\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$

$\therefore 2\vec{a}+m\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b}$

따라서 $2=-k$, $m=k$이므로

$k=-2$, $m=-2$ **답 -2**

119

답 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$, 4, 3

120

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=(\vec{b}-\vec{a})-(\vec{c}-\vec{b})$

$=-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$

(2) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{CA}$

$=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})-3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})$

$=2(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{b})-3(\vec{a}-\vec{c})$

$=-5\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}$

답 (1) $-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ (2) $-5\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}$

121

(1) $\vec{p}=\frac{3\vec{b}+2\vec{a}}{3+2}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$

(2) $\vec{q}=\frac{3\vec{b}-2\vec{a}}{3-2}=-2\vec{a}+3\vec{b}$

(3) $\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

답 (1) $\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ (2) $-2\vec{a}+3\vec{b}$ (3) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

122

$\vec{p}=\dfrac{3\vec{b}+4\vec{a}}{3+4}=\dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}$

$\vec{q}=\dfrac{3\vec{b}-4\vec{a}}{3-4}=4\vec{a}-3\vec{b}$

답 $\vec{p}=\dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}$, $\vec{q}=4\vec{a}-3\vec{b}$

123

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하면 점 M은 선분 OB의 중점이므로

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$

점 N은 선분 AM을 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{ON}=\dfrac{2\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{OA}}{2+3}$

$=\dfrac{2\times\frac{1}{2}\vec{b}+3\vec{a}}{5}$

$=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

따라서 $x=\dfrac{3}{5}$, $y=\dfrac{1}{5}$이므로

$x+y=\dfrac{4}{5}$ 답 $\dfrac{4}{5}$

124

점 P는 선분 OA를 3 : 2로 내분하는 점이므로

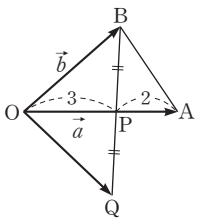
$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\dfrac{3}{5}\vec{a}$

또, 점 Q는 선분 PB를 1 : 2로 외분하는 점이므로

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OP}}{1-2}=-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OP}$

$=-\vec{b}+2\times\dfrac{3}{5}\vec{a}$

$=\dfrac{6}{5}\vec{a}-\vec{b}$ 답 $\dfrac{6}{5}\vec{a}-\vec{b}$



125

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

즉, $\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}=(-\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}$

$=-\vec{a}-2\vec{b}$

따라서 $x=-1$, $y=-2$이므로

$x^2+y^2=(-1)^2+(-2)^2=5$ 답 5

126

점 P는 선분 AB의 중점이므로

$\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 선분 CP를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$\therefore \overrightarrow{GP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CP}$

이때 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{GP}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)$

$=\dfrac{1}{6}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$ 답 $\dfrac{1}{6}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

다른풀이 $\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$이고 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{BG}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}}{3}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$

$\therefore \overrightarrow{GP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\dfrac{1}{6}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

127

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$라 하면 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{BA}$에서

$2(\vec{a}-\vec{p})+3(\vec{b}-\vec{p})+3(\vec{c}-\vec{p})=2(\vec{a}-\vec{b})$

$5\vec{b}+3\vec{c}=8\vec{p}$

$\therefore \vec{p}=\dfrac{5\vec{b}+3\vec{c}}{8}=\dfrac{3\times\vec{c}+5\times\vec{b}}{3+5}$

따라서 점 P는 선분 BC를 3 : 5로 내분하는 점이므로

$m=3k$, $n=5k$ $(k>0)$

$\therefore \dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{5}$ 답 $\dfrac{3}{5}$

다른풀이 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{BA}$에서

$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=2(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})$

$\therefore 5\overrightarrow{PB}=-3\overrightarrow{PC}$

따라서 세 점 B, P, C는 한 직선 위에 있고 $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$의 방향이 서로 반대이므로 점 P는 선분 BC를 3 : 5로 내분하는 점이다.

$\therefore m=3k,\ n=5k\ (k>0)$ $\quad\therefore \dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{5}$

128

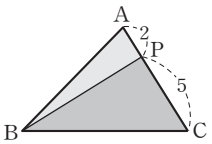
네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$라 하면 $4\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$에서

$4(\vec{a}-\vec{p})+(\vec{b}-\vec{p})+2(\vec{c}-\vec{p})=(\vec{b}-\vec{a})$

$5\vec{a}+2\vec{c}=7\vec{p}$

$\therefore \vec{p}=\dfrac{5\vec{a}+2\vec{c}}{7}=\dfrac{2\times\vec{c}+5\times\vec{a}}{2+5}$

따라서 점 P는 선분 AC를 2 : 5로 내분하는 점이므로



$\triangle PBC=\dfrac{5}{7}\triangle ABC$

$=\dfrac{5}{7}\times 42$

$=30$

답 **30**

129

답 (1) **(2, −5)** (2) **(0, −5)**
(3) **$-3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$** (4) **$4\vec{e_1}$**

130

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{(-7)^2+0^2}=7$

(2) $|\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

답 (1) **7** (2) **5**

131

(1) $m+2n=3,\ 6=2m+n$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=3,\ n=0$

(2) $2=n-m,\ 3+m=4$에서

$m=1,\ n=3$

답 (1) **$m=3, n=0$** (2) **$m=1, n=3$**

132

(1) $2\vec{a}-3\vec{b}=2(3,\ -2)-3(-1,\ 4)$

$=(6,\ -4)+(3,\ -12)$

$=(6+3,\ -4-12)$

$=(9,\ -16)$

(2) $3(2\vec{a}+\vec{b})-2(3\vec{a}-2\vec{b})=6\vec{a}+3\vec{b}-6\vec{a}+4\vec{b}$

$=7\vec{b}=7(-1,\ 4)$

$=(-7,\ 28)$

답 (1) **(9, −16)** (2) **(−7, 28)**

133

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(-5,\ -1)-(3,\ 2)$

$=(-8,\ -3)$

이므로 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-8)^2+(-3)^2}=\sqrt{73}$

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(4,\ -1)-(-2,\ 3)$

$=(6,\ -4)$

이므로 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6^2+(-4)^2}=2\sqrt{13}$

답 (1) **$\overrightarrow{AB}=(-8,\ -3),\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{73}$**
(2) **$\overrightarrow{AB}=(6,\ -4),\ |\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{13}$**

134

$2(\vec{a}+\vec{x})-5(\vec{b}-\vec{c})=3(\vec{a}-\vec{b}+\vec{x})$에서

$2\vec{a}+2\vec{x}-5\vec{b}+5\vec{c}=3\vec{a}-3\vec{b}+3\vec{x}$

$\therefore \vec{x}=-\vec{a}-2\vec{b}+5\vec{c}$

$=-(1,\ 2)-2(6,\ 2)+5(3,\ -1)$

$=(-1-12+15,\ -2-4-5)$

$=(2,\ -11)$

$\therefore |\vec{x}|=\sqrt{2^2+(-11)^2}=\sqrt{125}$

$=5\sqrt{5}$

답 **$5\sqrt{5}$**

135

$3(-\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})+2(2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$

$=-3\vec{a}+3\vec{b}-6\vec{c}+4\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c}$

$=\vec{a}-\vec{b}-4\vec{c}$

$=(3,\ 2)-(-4,\ 2)-4(1,\ -1)$

$=(3+4-4,\ 2-2+4)=(3,\ 4)$

또, 주어진 벡터의 크기를 구하면

$|3(-\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})+2(2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})|$

$=\sqrt{3^2+4^2}=5$ **답 성분: (3, 4), 크기: 5**

136

$-t\vec{a}+\vec{b}=-t(-1, 2)+(3, 4)$

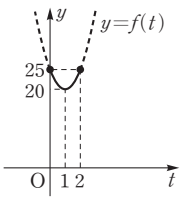
$=(t+3, -2t+4)$

$\therefore |-t\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(t+3)^2+(-2t+4)^2}$

$=\sqrt{5t^2-10t+25}$

$=\sqrt{5(t-1)^2+20}$

이때 $f(t)=5(t-1)^2+20$이라 하면 $0\le t\le 2$에서 $f(t)$는 $t=0$ 또는 $t=2$일 때 최댓값 25, $t=1$일 때 최솟값 20을 갖는다.



따라서 $|-t\vec{a}+\vec{b}|$의 최댓값과 최솟값을 구하면

$t=0$ 또는 $t=2$일 때, 최댓값은 $\sqrt{25}=5$

$t=1$일 때, 최솟값은 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

답 최댓값: 5, 최솟값: $2\sqrt{5}$

137

(1) $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$ (k, l은 실수)라 하면

$(3, -2)=k(-1, 4)+l(2, -3)$

$=(-k+2l, 4k-3l)$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3=-k+2l$, $-2=4k-3l$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=1$, $l=2$ $\therefore \vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\vec{d}=k\vec{a}+l\vec{b}$ (k, l은 실수)라 하면

$(-5, 0)=k(-1, 4)+l(2, -3)$

$=(-k+2l, 4k-3l)$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-5=-k+2l$, $0=4k-3l$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=-3$, $l=-4$ $\therefore \vec{d}=-3\vec{a}-4\vec{b}$

답 (1) $\vec{a}+2\vec{b}$ (2) $-3\vec{a}-4\vec{b}$

138

$\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$를 성분으로 나타내면

$(-3q, 4)=2(3, -p)+3(p+q, 2)$

$=(6, -2p)+(3p+3q, 6)$

$=(3p+3q+6, -2p+6)$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-3q=3p+3q+6$, $4=-2p+6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=1$, $q=-\frac{3}{2}$ $\therefore \vec{b}=\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

$\therefore |\vec{b}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$ **답 $\frac{\sqrt{17}}{2}$**

139

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1, 1)-(0, 3)$

$=(1, -2)$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(x, y)-(2, 6)$

$=(x-2, y-6)$

이때 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$이므로 $(1, -2)=(x-2, y-6)$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$1=x-2$, $-2=y-6$ $\therefore x=3$, $y=4$

$\therefore x+y=7$ **답 7**

140

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{PA}=(2, 0)-(x, y)=(2-x, -y)$

$\overrightarrow{PB}=(-3, 1)-(x, y)=(-3-x, 1-y)$

$\overrightarrow{CP}=(x, y)-(4, 5)=(x-4, y-5)$

이때 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CP}$이므로

$(2-x, -y)+(-3-x, 1-y)=(x-4, y-5)$

$(-1-2x, 1-2y)=(x-4, y-5)$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$-1-2x=x-4$, $1-2y=y-5$

$\therefore x=1$, $y=2$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(1, 2)$ **답 (1, 2)**

다른풀이 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CP}$에서

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ ····· ㉠

이때 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$는 각각 점 P에 대한 세 점 A, B, C의 위치벡터이므로 ㉠을 만족시키는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

따라서 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2-3+4}{3}, \frac{0+1+5}{3}\right)$ $\therefore (1, 2)$

141

$\vec{a}/\!/\vec{b}$이므로 $\vec{a}=k\vec{b}$ $(k\neq 0)$라 하면

$(3x+1, -5)=k(-2, x)=(-2k, kx)$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3x+1=-2k$, $-5=kx$

$-5=kx$에서 $k=-\frac{5}{x}$이므로 이것을 $3x+1=-2k$에 대입하면

$3x+1=\frac{10}{x}$, $3x^2+x-10=0$

$(x+2)(3x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

따라서 모든 x의 값의 합은

$-2+\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}$ **답 $-\frac{1}{3}$**

142

$\vec{a}+k\vec{c}=(5, 4)+k(3, 7)=(5+3k, 4+7k)$

$\vec{b}-\vec{a}=(-2, 3)-(5, 4)=(-7, -1)$

이때 두 벡터 $\vec{a}+k\vec{c}$와 $\vec{b}-\vec{a}$가 서로 평행하므로

$\vec{a}+k\vec{c}=t(\vec{b}-\vec{a})$ $(t\neq 0)$라 하면

$(5+3k, 4+7k)=t(-7, -1)=(-7t, -t)$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$5+3k=-7t$, $4+7k=-t$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$t=-\frac{1}{2}$, $k=-\frac{1}{2}$ **답 $-\frac{1}{2}$**

다른풀이 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여 $\vec{a}/\!/\vec{b}$일 때 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$임을 이용하면

$\frac{5+3k}{-7}=\frac{4+7k}{-1}$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$

143

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{AP}=(x, y)-(-2, 4)=(x+2, y-4)$

$\overrightarrow{BP}=(x, y)-(5, 3)=(x-5, y-3)$

이때 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$이므로

$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$7x-y-7=0$ **답 $7x-y-7=0$**

참고 세 점 A, B, P에 대하여

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$에서 $\overline{AP}=\overline{BP}$

즉, 점 P는 두 점 A, B로부터의 거리가 같은 점이므로 점 P의 자취는 $\overline{AB}$의 수직이등분선이다.

144

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{PA}=(1, 2)-(x, y)=(1-x, 2-y)$

$\overrightarrow{PB}=(3, -1)-(x, y)=(3-x, -1-y)$

$\overrightarrow{PC}=(-1, -2)-(x, y)=(-1-x, -2-y)$

$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$

$=(1-x, 2-y)+(3-x, -1-y)$

$+(-1-x, -2-y)$

$=(3-3x, -1-3y)$

이때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=2$이므로

$\sqrt{(3-3x)^2+(-1-3y)^2}=2$

양변을 제곱하면 $(3-3x)^2+(-1-3y)^2=4$

$\therefore (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

따라서 점 P가 그리는 도형은 점 $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi$ **답 $\frac{4}{3}\pi$**

145

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^\circ$
$=4\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-120^\circ)$
$=-4\times3\times\frac{1}{2}=-6$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-180^\circ)$
$=-4\times3\times1=-12$

답 (1) $6\sqrt{3}$ (2) -6 (3) -12

146

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-4)+2\times6=0$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+(-1)\times4=2$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\times5+4\times0=-10$

답 (1) 0 (2) 2 (3) -10

147

(1) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$
$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}$
$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$
$=3^2+2\times5=19$

(2) $(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$
$=3\vec{a}\cdot\vec{a}+3\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$
$=3|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$
$=3\times3^2+2\times5-4^2=21$

답 (1) 19 (2) 21

148

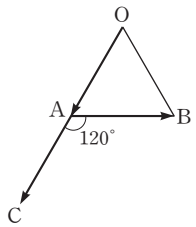
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\times(-2\sqrt{3})+1\times2=2$
$\vec{a}\cdot\vec{b}\geq0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\leq\theta\leq90^\circ)$라 하면
$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2}{\sqrt{0^2+1^2}\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}}=\frac{1}{2}$
$\therefore\ \theta=60^\circ$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-\sqrt{3})+(-2\sqrt{3})\times1=-4\sqrt{3}$
$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ $(90^\circ<\theta\leq180^\circ)$라 하면
$\cos(180^\circ-\theta)$
$=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
$=-\frac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}}$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}$
따라서 $180^\circ-\theta=30^\circ$이므로 $\theta=150^\circ$

답 (1) 60° (2) 150°

149

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$의 연장선 위에 $\overline{OA}=\overline{AC}$인 점 C를 잡으면 두 벡터 $\overline{AC}$와 $\overline{AB}$가 이루는 각의 크기는 120°이므로



$\overline{OA}\cdot\overline{AB}$
$=\overline{AC}\cdot\overline{AB}$
$=-|\overline{AC}||\overline{AB}|\cos(180^\circ-120^\circ)$
$=-4\times4\times\frac{1}{2}=-8$

답 -8

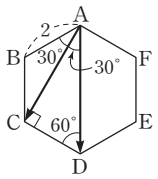
다른풀이 $\overline{OA}\cdot\overline{AB}$
$=\overline{OA}\cdot(\overline{OB}-\overline{OA})$
$=\overline{OA}\cdot\overline{OB}-|\overline{OA}|^2$
$=|\overline{OA}||\overline{OB}|\cos60^\circ-|\overline{OA}|^2$
$=4\times4\times\frac{1}{2}-4^2=-8$

150

(1) $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=|\overline{OA}||\overline{OB}|\cos60^\circ$
$=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

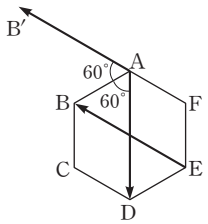
(2) $\overline{FE}=\overline{BC}$이고 $\angle ABC=120^\circ$이므로
$\overline{BA}\cdot\overline{FE}=\overline{BA}\cdot\overline{BC}$
$=-|\overline{BA}||\overline{BC}|\cos(180^\circ-120^\circ)$
$=-2\times2\times\frac{1}{2}=-2$

(3) 삼각형 ACD에서



$\angle CAD=30^\circ$, $\angle CDA=60^\circ$
이므로 삼각형 ACD는
$\angle ACD=90^\circ$인 직각삼각형이다.
$\overline{AD}=2\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=2$이므로
$\overline{AC}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$
$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos 30^\circ$
$=2\sqrt{3}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$

(4) 오른쪽 그림과 같이 벡터



$\overrightarrow{EB}$를 평행이동하여 시점을
같게 만들면 $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB'}$이
고 $\angle DAB'=120^\circ$이므로
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}$
$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB'}$
$=-|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB'}|\cos(180^\circ-120^\circ)$
$=-4\times 4\times\frac{1}{2}=-8$

답 (1) **2** (2) **−2** (3) **12** (4) **−8**

151

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3, x-1)\cdot(-2, x+3)$
$=3\times(-2)+(x-1)(x+3)$
$=x^2+2x-9$
이때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$이므로
$x^2+2x-9=-1$, $x^2+2x-8=0$
$(x+4)(x-2)=0$
$\therefore x=2$ ($\because x>0$) **답 2**

152

$|\vec{a}|=5$이므로 $\sqrt{(x+2)^2+4^2}=5$
양변을 제곱하여 정리하면
$x^2+4x-5=0$, $(x+5)(x-1)=0$
$\therefore x=1$ ($\because x>0$)
따라서 $\vec{a}=(3, 4)$, $\vec{b}=(1, 5)$이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times 1+4\times 5=23$ **답 23**

153

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이므로
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=|\vec{a}|\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}|$
$|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$의 양변을 제곱하면
$|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=13$
$|\vec{a}|^2-6\times\frac{1}{2}|\vec{a}|+9\times 1^2=13$
$|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|-4=0$, $(|\vec{a}|+1)(|\vec{a}|-4)=0$
$\therefore |\vec{a}|=4$ ($\because |\vec{a}|\geq 0$) **답 4**

154

$|\vec{a}+\vec{b}|=5$의 양변을 제곱하면
$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=25$ …… ㉠
$|\vec{a}-\vec{b}|=3$의 양변을 제곱하면
$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=34$
$\therefore |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=17$
$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}+2\vec{b}|^2$
$=(4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$
$+(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)$
$=5|\vec{a}|^2+5|\vec{b}|^2=5(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$
$=5\times 17=85$ **답 85**

155

$\vec{a}-\vec{b}=(3, 1)-(1, 2)=(2, -1)$
$\vec{a}+2\vec{c}=(3, 1)+2(-2, 1)=(-1, 3)$
$\therefore (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{c})=2\times(-1)+(-1)\times 3=-5$
$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{c})<0$이므로 두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$와 $\vec{a}+2\vec{c}$가 이루는 각의 크기를 θ ($90^\circ<\theta\leq 180^\circ$)라 하면
$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{c})}{|\vec{a}-\vec{b}||\vec{a}+2\vec{c}|}$
$=-\frac{-5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}$
$=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
따라서 $180^\circ-\theta=45^\circ$이므로
$\theta=135^\circ$ **답 135°**

156

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x-1,\ 3)\cdot(x,\ 2)$

$=(x-1)x+3\times2$

$=x^2-x+6$

이때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$이므로 $x^2-x+6=8$

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(2,\ 2)$이고, $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq0$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\dfrac{8}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+2^2}}$

$=\dfrac{8}{\sqrt{10}\sqrt{8}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 답 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

157

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$에서 $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$

즉, $|\vec{c}|=|-\vec{a}-\vec{b}|$이므로 양변을 제곱하면

$|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$14^2=6^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+10^2,\ 2\vec{a}\cdot\vec{b}=60$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=30$

$\vec{a}\cdot\vec{b}\geq0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ\leq\theta\leq90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{30}{6\times10}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta=60^\circ$ 답 60°

158

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\geq0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ\leq\theta\leq90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3\times2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=45^\circ$

$\therefore \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\sin45^\circ$

$=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

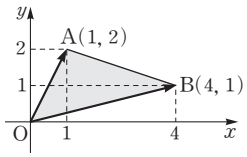
159

$\overrightarrow{OA}=(1,\ 2)$,

$\overrightarrow{OB}=(4,\ 1)$이고

$|\overrightarrow{OA}|^2=1^2+2^2=5$,

$|\overrightarrow{OB}|^2=4^2+1^2=17$,



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times4+2\times1=6$이므로

$\triangle AOB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\times17-6^2}=\dfrac{7}{2}$ 답 $\dfrac{7}{2}$

다른풀이 $\triangle AOB=\dfrac{1}{2}|1\times1-2\times4|$

$=\dfrac{1}{2}\times7=\dfrac{7}{2}$

160

두 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+x\vec{b}$를 각각 성분으로 나타내면

$2\vec{a}+\vec{b}=2(-4,\ 3)+(2,\ 1)=(-6,\ 7)$

$\vec{a}+x\vec{b}=(-4,\ 3)+x(2,\ 1)=(-4+2x,\ 3+x)$

두 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+x\vec{b}$가 서로 수직이면

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+x\vec{b})=0$이므로

$(-6,\ 7)\cdot(-4+2x,\ 3+x)=0$

$-6(-4+2x)+7(3+x)=0$

$-5x+45=0$ $\therefore x=9$ 답 **9**

161

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{c}=(3,\ 0)\cdot(x,\ y)=0$

$3x=0$ $\therefore x=0,\ \vec{c}=(0,\ y)$

또, $\vec{c}-\vec{a}=(0,\ y)-(3,\ 0)=(-3,\ y)$이고 두 벡터 $\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하므로

$(\vec{c}-\vec{a})\cdot\vec{b}=\pm|\vec{c}-\vec{a}||\vec{b}|$

$(-3,\ y)\cdot(1,\ -3)=\pm\sqrt{(-3)^2+y^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}$

$-3-3y=\pm\sqrt{10}\sqrt{y^2+9}$

양변을 제곱하여 정리하면

$y^2-18y+81=0,\ (y-9)^2=0$ $\therefore y=9$

따라서 $\vec{c}=(0,\ 9)$이므로

$|\vec{c}|=\sqrt{0^2+9^2}=9$ 답 **9**

162

(1) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{-5}$ $\therefore \frac{x-2}{4}=\frac{3-y}{5}$

(3) 방향벡터 $\vec{u}=(0, -2)$는 y축에 평행하므로 구하는 직선의 방정식은

$x=5$

(4) 방향벡터 $\vec{u}=(3, 0)$은 x축에 평행하므로 구하는 직선의 방정식은

$y=-3$

답 (1) $\frac{x-2}{4}=\frac{3-y}{5}$ (2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$

(3) $x=5$ (4) $y=-3$

163

(1) 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는

$(-4, 3)-(2, 1)=(-6, 2)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x-2}{-6}=\frac{y-1}{2}$ $\therefore \frac{x-2}{3}=1-y$

(2) 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는

$(5, -1)-(-2, 4)=(7, -5)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x+2}{7}=\frac{y-4}{-5}$ $\therefore \frac{x+2}{7}=\frac{4-y}{5}$

답 (1) $\frac{x-2}{3}=1-y$ (2) $\frac{x+2}{7}=\frac{4-y}{5}$

(3) $x=-3$ (4) $y=6$

164

(1) $2(x-1)-4(y+3)=0$

$\therefore x-2y-7=0$

(2) $-3(x+2)+(y-1)=0$

$\therefore 3x-y+7=0$

(3) $4(x+5)=0$ $\therefore x=-5$

(4) $-2(y-1)=0$ $\therefore y=1$

답 (1) $x-2y-7=0$ (2) $3x-y+7=0$

(3) $x=-5$ (4) $y=1$

165

두 점 A(2, 3), B(4, 2)를 지나는 직선의 방향벡터는

$\overrightarrow{AB}=(4, 2)-(2, 3)=(2, -1)$

이므로 두 점 A, B를 지나는 직선에 평행한 직선의 방향벡터는 $(2, -1)$이다.

따라서 점 $(3, 1)$을 지나고 방향벡터가 $(2, -1)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}$ $\therefore \frac{x-3}{2}=1-y$

답 $\frac{x-3}{2}=1-y$

166

직선 $x-3=\frac{1-y}{2}$, 즉 $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}$의 방향벡터는 $(1, -2)$이므로 이 직선에 평행한 직선의 방향벡터는 $(1, -2)$이다.

따라서 점 $(1, -4)$를 지나고 방향벡터가 $(1, -2)$인 직선의 방정식은

$x-1=\frac{y+4}{-2}$

이 직선이 점 $(k, 4)$를 지나므로

$k-1=-4$ $\therefore k=-3$ 답 -3

167

두 점 A(3, 2), B(−4, 1)을 지나는 직선의 방향벡터는

$\overrightarrow{AB}=(-4, 1)-(3, 2)=(-7, -1)$

이므로 두 점 A, B를 지나는 직선에 수직인 직선의 법선벡터는 $(-7, -1)$이다.

따라서 점 $(1, -2)$를 지나고 법선벡터가 $(-7, -1)$인 직선의 방정식은

$-7(x-1)-(y+2)=0$

$\therefore 7x+y-5=0$ 답 $7x+y-5=0$

168

직선 $\frac{x+4}{5}=-y-1$, 즉 $\frac{x+4}{5}=\frac{y+1}{-1}$의 방향벡터는 $(5, -1)$이므로 이 직선에 수직인 직선의 법선벡터는 $(5, -1)$이다.

따라서 점 $(-2, -4)$를 지나고 법선벡터가 $(5, -1)$인 직선의 방정식은

$5(x+2)-(y+4)=0$

$\therefore 5x-y+6=0$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$-y+6=0 \qquad \therefore y=6$

따라서 구하는 직선의 y절편은 6이다. **답 6**

169

$\vec{u}=\boxed{(1, -\sqrt{3})}$, $\vec{v}=\boxed{(-3, \sqrt{3})}$

$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\boxed{2}$

$|\vec{v}|=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\boxed{2\sqrt{3}}$

$|\vec{u}\cdot\vec{v}|=|(1, -\sqrt{3})\cdot(-3, \sqrt{3})|=|-6|=\boxed{6}$

$\therefore \cos\theta=\frac{6}{2\times 2\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore \theta=\boxed{30}^\circ$

답 $(1, -\sqrt{3})$, $(-3, \sqrt{3})$, 2, $2\sqrt{3}$, 6, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 30

170

(1) 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(2, 1)$, $\vec{v}=(3, -1)$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\frac{|2\times 3+1\times(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta=45^\circ$

(2) 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(3, 4)$, $\vec{v}=(4, -3)$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\frac{|3\times 4+4\times(-3)|}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{4^2+(-3)^2}}=0$

$\therefore \theta=90^\circ$

답 (1) 45° (2) 90°

171

주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(-2, k)$, $\vec{v}=(6, 3)$

(1) 두 직선이 서로 평행하므로

$\vec{u}=t\vec{v}$ $(t\ne 0)$에서

$(-2, k)=t(6, 3)$

즉, $-2=6t$, $k=3t$이므로

$t=-\frac{1}{3}$, $k=-1$

(2) 두 직선이 서로 수직이므로

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$에서

$(-2)\times 6+k\times 3=0$

$3k-12=0 \qquad \therefore k=4$

답 (1) -1 (2) 4

172

두 직선 $x-2=\frac{y+1}{2}$, $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-6}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(1, 2)$, $\vec{v}=(2, -6)$

$\therefore \cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|1\times 2+2\times(-6)|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{2^2+(-6)^2}}$

$=\frac{10}{\sqrt{5}\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\theta=45^\circ$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$**

173

두 직선 $\frac{x+2}{\sqrt{3}}=\frac{y-4}{5}$, $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{a}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(\sqrt{3}, 5)$, $\vec{v}=(2, a)$

두 직선이 이루는 각의 크기가 30°이므로

$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\cos 30^\circ$

$\frac{|\sqrt{3}\times 2+5\times a|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+5^2}\sqrt{2^2+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2|2\sqrt{3}+5a|=\sqrt{84}\sqrt{4+a^2}$

양변을 제곱하여 정리하면
$a^2+5\sqrt{3}a-18=0$, $(a+6\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$
$\therefore a=-6\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$-6\sqrt{3}+\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$ **답 $-5\sqrt{3}$**

174

두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1-a, a-3)$
직선 $\frac{x+1}{3}=y-2$의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면
$\vec{v}=(3, 1)$
이때 두 직선이 서로 수직이므로
$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$에서
$(-1-a)\times3+(a-3)\times1=0$
$-2a-6=0$ $\therefore a=-3$ **답 -3**

175

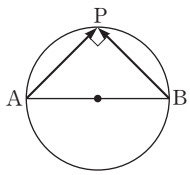
두 직선 $\frac{x}{k}=\frac{2-y}{2}$, $x-4=\frac{1-y}{k+2}$의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면
$\vec{u}=(k, -2)$, $\vec{v}=(1, -k-2)$
두 직선이 서로 평행하므로 $\vec{u}=t\vec{v}$ $(t\neq0)$에서
$(k, -2)=t(1, -k-2)$
$\therefore k=t$, $-2=t(-k-2)$
$t=k$를 $-2=t(-k-2)$에 대입하여 정리하면
$k^2+2k-2=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 -2이다. **답 -2**

참고 이차방정식 $k^2+2k-2=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1^2-1\times(-2)=3>0$이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

176

$\vec{p}=(x, y)$, $\vec{a}=(3, -2)$이므로
$\vec{p}-\vec{a}=(x, y)-(3, -2)=(x-3, y+2)$
$|\vec{p}-\vec{a}|=5$에서 양변을 제곱하면
$|\vec{p}-\vec{a}|^2=25$
$(x-3, y+2)\cdot(x-3, y+2)=25$
$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=25$
따라서 점 P가 그리는 도형의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=25$
답 $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

177



원 위의 한 점을 P(x, y)라 하면
$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$이므로
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$
이때 $\overrightarrow{AP}=(x+1, y-4)$,
$\overrightarrow{BP}=(x-5, y+2)$이므로 구하는 원의 방정식은
$(x+1)(x-5)+(y-4)(y+2)=0$
$x^2-4x-5+y^2-2y-8=0$
$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=18$
답 $(x-2)^2+(y-1)^2=18$

178

두 점 A, B의 위치벡터는 각각
$\vec{a}=(4, -1)$, $\vec{b}=(-2, 1)$
점 P의 위치벡터를 $\vec{p}=(x, y)$라 하면
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서
$(x-4, y+1)\cdot(x+2, y-1)=0$
$(x-4)(x+2)+(y+1)(y-1)=0$
$x^2-2x-8+y^2-1=0$
$\therefore (x-1)^2+y^2=10$
따라서 점 P가 그리는 도형은 중심이 점 $(1, 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원이므로 구하는 넓이는
$\pi\times(\sqrt{10})^2=10\pi$ **답 10π**

Ⅲ. 공간도형과 공간좌표

179

다섯 개의 점 A, B, C, D, E 중 어느 네 점도 한 평면 위에 있지 않고 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 다섯 개의 점 중 세 개의 점만 주어지면 하나의 평면을 결정한다.

따라서 다섯 개의 점으로 결정되는 서로 다른 평면은

평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ABE, 평면 ACD, 평면 ACE, 평면 ADE, 평면 BCD, 평면 BCE, 평면 BDE, 평면 CDE

의 10개이다. **답 10**

다른풀이 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 하나의 평면을 결정하므로 구하는 평면의 개수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

KEY Point

서로 다른 n개에서 r $(0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

180

주어진 사각뿔에서 5개의 꼭짓점으로 결정되는 서로 다른 평면은

평면 ABC, 평면 ACD, 평면 ADE, 평면 ABE, 평면 ABD, 평면 ACE, 평면 BCDE

의 7개이다. **답 7**

181

ㄱ. 세 점 A, C, G는 한 직선 위에 있지 않으므로 하나의 평면을 결정한다.

ㄴ. 직선 FH와 이 직선 위에 있지 않은 한 점 A는 하나의 평면을 결정한다.

ㄷ. 두 직선 BD, GH는 꼬인 위치에 있으므로 하나의 평면을 만들 수 없다.

ㄹ. 두 직선 BF, DH는 평행하므로 하나의 평면을 결정한다.

따라서 하나의 평면이 결정되는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

182

공간에서 서로 다른 두 직선이 만나지도 않고 평행하지도 않을 때, 이 두 직선은 꼬인 위치에 있다고 한다.

따라서 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

183

답 직선 AB, 직선 AD, 직선 BF, 직선 DH, 직선 FG, 직선 HG

184

주어진 정팔면체에서 모서리 BF와 평행한 모서리는 모서리 AD의 1개이므로

$a=1$

모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 CD, 모서리 DE, 모서리 CF, 모서리 EF의 4개이므로

$b=4$

한편, 모서리 AB와 모서리 DF, 모서리 BE와 모서리 CD는 각각 서로 평행하다.

즉, 평면 ABE와 평행한 평면은 평면 CDF의 1개이므로

$c=1$

평면 ABC와 평행한 모서리는 모서리 DE, 모서리 DF, 모서리 EF의 3개이므로

$d=3$

$\therefore a+b+c+d=1+4+1+3=9$ **답 9**

185

삼각형 ABC에서 두 점 P, Q는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 중점이고, 삼각형 ACD에서 두 점 S, R는 각각 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$의 중점이므로

$$\overline{PQ}=\overline{SR}=\frac{1}{2}\overline{AC}=5$$

또, 삼각형 BCD에서 두 점 Q, R는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 중점이고, 삼각형 ABD에서 두 점 P, S는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$의 중점이므로

$\overline{QR}=\overline{PS}=\frac{1}{2}\overline{BD}=4$

따라서 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}=5+4+5+4=18$ **답 18**

186

삼각형 ABD에서 두 점 E, H는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$의 중점이고, 삼각형 BCD에서 두 점 F, G는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 중점이므로

$\overline{EH}=\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}=5$

또, 삼각형 ABC에서 두 점 E, F는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 중점이고, 삼각형 ADC에서 두 점 H, G는 각각 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$의 중점이므로

$\overline{EF}=\overline{HG}=\frac{1}{2}\overline{AC}=6$

따라서 사각형 EFGH의 둘레의 길이는

$\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HE}=6+5+6+5=22$ **답 22**

다른풀이 삼각형 ABD에서 두 점 E, H는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$의 중점이므로

$\overline{EH}/\!/\overline{BD}$, $\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BD}=5$ ····· ㉠

삼각형 BCD에서 두 점 F, G는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 중점이므로

$\overline{FG}/\!/\overline{BD}$, $\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{BD}=5$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{EH}/\!/\overline{FG}$, $\overline{EH}=\overline{FG}$이므로 사각형 EFGH는 평행사변형이다.

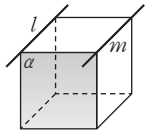
또, 같은 방법으로 $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AC}=6$이므로 평행사변형 EFGH의 둘레의 길이는

$2(\overline{EH}+\overline{EF})=2(5+6)=22$

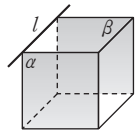
187

정육면체의 모서리를 직선으로, 면을 평면으로 생각하면 다음 그림과 같다.

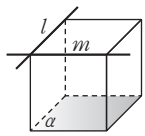
ㄱ.



ㄴ.



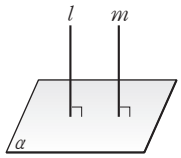
ㄷ. [반례] 오른쪽 그림의 정육면체에서 $l/\!/\alpha$, $m/\!/\alpha$이지만 $l\perp m$이다.



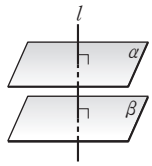
따라서 옳지 않은 것은 ㄷ뿐이다. **답 ㄷ**

다른풀이

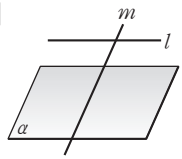
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ. [반례]



따라서 옳지 않은 것은 ㄷ뿐이다.

188

(1) $\overrightarrow{BG}/\!/\overrightarrow{AH}$이므로 직선 AF와 직선 BG가 이루는 각의 크기는 직선 AF와 직선 AH가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 $\overline{AF}=\overline{AH}=\overline{HF}$이므로 삼각형 AFH는 정삼각형이다.

$\therefore\ \angle FAH=60^\circ$

따라서 직선 AF와 직선 BG가 이루는 각의 크기는 60°이다.

(2) $\overrightarrow{AB}\perp$(평면 BFGC)이므로

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CF}$

또, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$는 정사각형 BFGC의 두 대각선이므로

$\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{BG}$

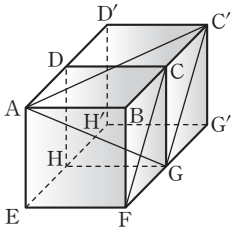
즉, $\overrightarrow{CF}\perp$(평면 ABG)이므로

$\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{AG}$

따라서 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 90°이다.

답 (1) **60°** (2) **90°**

다른풀이 ⑵ 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 나란히 붙이면 $\overrightarrow{CF}\,/\!/\,\overrightarrow{C'G}$이므로 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 C′G가 이루는 각의 크기와 같다.



정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면 삼각형 AGC′에서

$\overline{AG}=\sqrt{3}a$, $\overline{C'G}=\sqrt{2}a$, $\overline{AC'}=\sqrt{5}a$

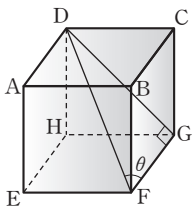
$\therefore \overline{AC'}^2=\overline{AG}^2+\overline{C'G}^2$

즉, 삼각형 AGC′은 $\angle AGC'=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 90°이다.

189

$\overrightarrow{HE}\,/\!/\,\overrightarrow{GF}$이므로 직선 DF와 직선 HE가 이루는 각의 크기는 직선 DF와 직선 GF가 이루는 각의 크기와 같다.



$\overrightarrow{GF}\perp$(평면 DHGC)이므로 삼각형 DFG는 $\angle DGF=90^\circ$인 직각삼각형이다.

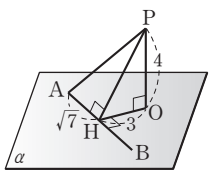
이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$\overline{DF}=\sqrt{3}a$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{DF}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

190

오른쪽 그림과 같이 선분 PH를 그으면 직각삼각형 PHO에서



$\overline{PH}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이때 $\overline{PO}\perp\alpha$이고 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

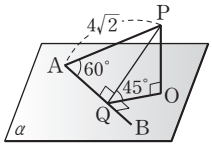
$\overline{PH}\perp\overline{AB}$

따라서 직각삼각형 PAH에서

$\overline{PA}=\sqrt{(\sqrt{7})^2+5^2}=4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

191

$\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OQ}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{PQ}\perp\overline{AB}$

직각삼각형 PAQ에서

$\overline{PQ}=\overline{PA}\sin 60^\circ$

$=4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$

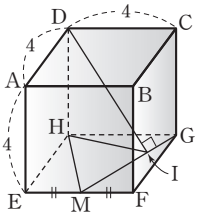
따라서 직각삼각형 PQO에서

$\overline{OQ}=\overline{PQ}\cos 45^\circ$

$=2\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

192

$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{MG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{HI}\perp\overline{MG}$

이때 $\overline{MF}=2$이므로 직각삼각형 GMF에서

$\overline{GM}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

삼각형 HMG에서

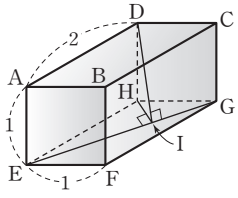
$\dfrac{1}{2}\times\overline{HG}\times\overline{GF}=\dfrac{1}{2}\times\overline{GM}\times\overline{HI}$

$\dfrac{1}{2}\times4\times4=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\overline{HI}$

$\therefore \overline{HI}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ 답 $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

193

$\overline{DH}\perp$(평면 EFGH), $\overline{DI}\perp\overline{EG}$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{HI}\perp\overline{EG}$

직각삼각형 EGH에서

$\overline{EG}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

이때 삼각형 EGH에서

$\frac{1}{2}\times\overline{EH}\times\overline{HG}=\frac{1}{2}\times\overline{EG}\times\overline{HI}$

$\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{HI}$

$\therefore \overline{HI}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

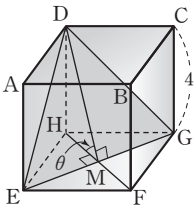
따라서 직각삼각형 DHI에서

$\overline{DI}=\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{DI}}=\frac{1}{\frac{3\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

194

오른쪽 그림과 같이 $\overline{EG}$와 $\overline{FH}$의 교점을 M이라 하면 $\overline{DM}\perp\overline{EG}$, $\overline{HM}\perp\overline{EG}$이므로 평면 DEG와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 $\overline{DM}$과 $\overline{HM}$이 이루는 각의 크기와 같다.



$\therefore \angle DMH=\theta$

이때

$\overline{DH}=4$,

$\overline{HM}=\frac{1}{2}\overline{HF}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

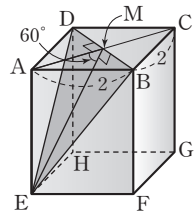
이므로 직각삼각형 DHM에서

$\overline{DM}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{HM}}{\overline{DM}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

195

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 M이라 하면 $\overline{AM}\perp\overline{BD}$, $\overline{EM}\perp\overline{BD}$이므로 평면 ABCD와 평면 BDE가 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$과 $\overline{EM}$이 이루는 각의 크기와 같다.



$\therefore \angle AME=60^\circ$

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$이므로

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 AEM에서

$\overline{AE}=\overline{AM}\tan60^\circ=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ 답 $\sqrt{6}$

196

답 (1) $\overline{A'B'}$, $\overline{AB}$ (2) S', S

197

(1) 점 C의 평면 AEHD 위로의 정사영은 점 D이므로 선분 AC의 평면 AEHD 위로의 정사영은 선분 AD이다.

(2) 선분 DC는 평면 BFGC와 수직이므로 선분 DC의 평면 BFGC 위로의 정사영은 점 C이다.

(3) 점 D의 평면 EFGH 위로의 정사영은 점 H이므로 선분 DF의 평면 EFGH 위로의 정사영은 선분 HF이다.

(4) 두 점 A, D의 평면 EFGH 위로의 정사영은 각각 점 E, 점 H이므로 삼각형 AFD의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFH이다.

답 (1) **선분 AD** (2) **점 C**
(3) **선분 HF** (4) **삼각형 EFH**

198

(1) $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta=10\cos45^\circ$

$=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

(2) $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$에서 $8=\overline{AB}\cos60^\circ$

$8=\frac{1}{2}\overline{AB}$ $\therefore \overline{AB}=16$

(3) $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$에서 $2\sqrt{3}=4\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 (1) $5\sqrt{2}$ (2) **16** (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

199

평면 β 위의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

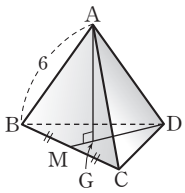
$3\pi\times\cos 30^\circ=3\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ 답 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

200

오른쪽 그림과 같이 삼각형 BCD의 무게중심을 G라 하면 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 점 G와 일치한다.

즉, $\overline{AD}$의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\overline{GD}$이다.



이때 $\overline{DM}$은 정삼각형 BCD의 높이이므로

$\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{GD}=\dfrac{2}{3}\overline{DM}=\dfrac{2}{3}\times 3\sqrt{3}$

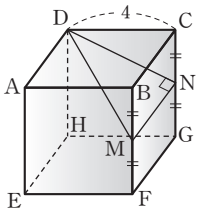
$=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

201

오른쪽 그림과 같이 $\overline{CG}$의 중점을 N이라 하면

$\overline{MN}\perp$(평면 DHGC)

즉, $\overline{DM}$의 평면 DHGC 위로의 정사영은 $\overline{DN}$이다.



이때 삼각형 DNC는 직각삼각형이므로

$\overline{DN}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

202

평면 α 위에 있는 정삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$S\cos 60^\circ=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

203

밑면인 정사각형의 넓이는

$6\times 6=36$

잘린 단면의 넓이를 S라 하면 단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 45°이고, 잘린 단면의 평면 EFGH 위로의 정사영은 밑면인 정사각형이므로

$S\cos 45^\circ=36$에서 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}S=36$

$\therefore S=36\sqrt{2}$ 답 $36\sqrt{2}$

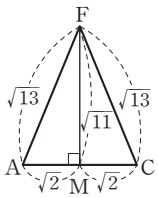
204

$\overline{FA}=\overline{FC}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$,

$\overline{AC}=2\sqrt{2}$

이므로 삼각형 AFC는 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{FM}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{11}$

$\therefore \triangle AFC=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{11}$

$=\sqrt{22}$

이때 삼각형 AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFG이고

$\triangle EFG=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$이므로

$\triangle EFG=\triangle AFC\cos\theta$에서

$2=\sqrt{22}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{22}}=\dfrac{\sqrt{22}}{11}$ 답 $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$

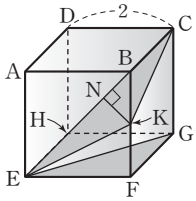
205

정육면체의 한 모서리의 길이가 2이므로

$\overline{KE}=\overline{KC}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\overline{CE}=2\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 K에서 $\overline{CE}$에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $\overline{EN}=\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 KEN에서



$\overline{KN}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}$

$\therefore \triangle CEK=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$=\sqrt{6}$

이때 삼각형 CEK의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 GEF이고 $\triangle GEF=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$이므로

$\triangle GEF=\triangle CEK\cos\theta$에서

$2=\sqrt{6}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ **답** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

206

정육면체의 한 모서리의 길이가 4이므로

$\overline{CM}=\overline{ME}=\overline{EN}=\overline{NC}$

$=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

즉, 사각형 CMEN은 마름모이다.

마름모 CMEN의 두 대각선의 길이는 각각

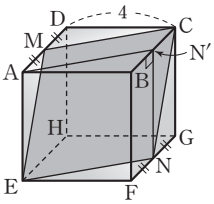
$\overline{MN}=\overline{AF}=4\sqrt{2}$, $\overline{CE}=4\sqrt{3}$

즉, 마름모 CMEN의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{CE}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{3}$

$=8\sqrt{6}$

한편, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 N′이라 하면 $\overline{NN'}\perp\overline{BC}$이고, 점 E에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발이 점 A이므로 마름모 CMEN의 평면 ABCD 위로의 정사영은 평행사변형 CMAN′이다.



이때 평행사변형 CMAN′의 넓이는

$\overline{AM}\times\overline{AB}=2\times 4=8$

따라서 $\square CMAN'=\square CMEN\cos\theta$에서

$8=8\sqrt{6}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{8}{8\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ **답** $\frac{\sqrt{6}}{6}$

207

답 (1) $\mathbf{P(4,0,2)}$, $\mathbf{Q(4,3,0)}$, $\mathbf{R(0,3,2)}$

(2) $\mathbf{P(2,-1,3)}$, $\mathbf{Q(0,-1,3)}$, $\mathbf{R(2,-1,0)}$

(3) $\mathbf{P(0,0,5)}$, $\mathbf{Q(0,3,5)}$, $\mathbf{R(-2,3,0)}$

(4) $\mathbf{P(2,-3,0)}$, $\mathbf{Q(0,-3,0)}$, $\mathbf{R(2,0,0)}$

208

답 (1) $\mathbf{(2,0,0)}$ (2) $\mathbf{(0,-1,0)}$

(3) $\mathbf{(0,0,-4)}$ (4) $\mathbf{(2,-1,0)}$

(5) $\mathbf{(0,-1,-4)}$ (6) $\mathbf{(2,0,-4)}$

209

(1) 점 P의 좌표가 (4, 0, 5)이므로

P′(4, 0, −5)

(2) 점 Q의 좌표가 (0, 3, 0)이므로

Q′(0, −3, 0)

(3) 점 R의 좌표가 (4, 3, 5)이므로

R′(−4, −3, −5)

답 (1) $\mathbf{(4,0,-5)}$ (2) $\mathbf{(0,-3,0)}$

(3) $\mathbf{(-4,-3,-5)}$

210

점 P(−1, 5, 6)과 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는

(1, −5, −6)

점 (1, −5, −6)에서 xy평면에 내린 수선의 발의 좌표는

(1, −5, 0) **답** $\mathbf{(1,-5,0)}$

211

점 A는 점 B(a, 6, 4)에서 zx평면에 내린 수선의 발이므로

A(a, 0, 4)

점 A와 y축에 대하여 대칭인 점의 좌표는

(−a, 0, −4)

이 점이 점 (−2, 0, b)와 일치하므로

$a=2$, $b=-4$

$\therefore a-b=2-(-4)=6$ **답** **6**

212

$\overline{AB}=2\overline{AC}$에서 $\overline{AB}^2=4\overline{AC}^2$이므로

$(2k)^2+(-1-1)^2+(0-2)^2$

$=4\{(-1)^2+(2-1)^2+(k-1)^2\}$

$4k^2+8=4k^2-8k+12$

$8k=4$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

213

좌표공간에서 원점을 O라 하고 xy평면 위의 직선 $y=x$ 위의 점 Q의 좌표를 $(t, t, 0)$ $(t\neq0)$이라 하면

삼각형 POQ는 $\angle PQO=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{OP}^2=\overline{OQ}^2+\overline{PQ}^2$에서

$2^2+3^2+1^2=t^2+t^2+(t-2)^2+(t-3)^2+(-1)^2$

$2t^2-5t=0$, $t(2t-5)=0$

$\therefore t=\frac{5}{2}$ $(\because t\neq0)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2+\left(\frac{5}{2}-3\right)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

214

A(1, 1, −1), B(−1, 1, 1), C(1, −1, 1)이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(1-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{BC}=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2+(1-1)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-1)^2+(-1-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이므로

$\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

215

점 P가 z축에 위에 있으므로 P(0, 0, z)라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(-3)^2+4^2+(z-1)^2=2^2+(-5)^2+(z-3)^2$

$z^2-2z+26=z^2-6z+38$, $4z=12$ $\therefore z=3$

$\therefore$ P(0, 0, 3)

답 **(0, 0, 3)**

216

점 P(a, b, c)가 yz평면 위에 있으므로 $a=0$

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{OP}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{OP}^2$

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서

$(-1)^2+(b-2)^2+(c-1)^2=1^2+b^2+(c-1)^2$

$-4b+4=0$ $\therefore b=1$

$\overline{BP}^2=\overline{OP}^2$에서

$1^2+b^2+(c-1)^2=b^2+c^2$

$-2c+2=0$ $\therefore c=1$

$\therefore a+b+c=0+1+1=2$

답 **2**

217

점 C가 zx평면 위에 있으므로 C$(x, 0, z)$라 하자.

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이어야 한다.

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$(2-1)^2+(-1-1)^2+(3-2)^2$

$=(x-2)^2+1^2+(z-3)^2$

$\therefore x^2+z^2-4x-6z+8=0$ …… ㉠

또, $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$에서

$(x-2)^2+1^2+(z-3)^2$

$=(x-1)^2+(-1)^2+(z-2)^2$

$\therefore z=-x+4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

㉡에서 $x=0$일 때 $z=4$, $x=3$일 때 $z=1$

$\therefore$ C(0, 0, 4), C(3, 0, 1)

답 **(0, 0, 4), (3, 0, 1)**

218

점 A(3, 2, −1)의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영을 각각 A′, A″, A‴이라 하면

A′(3, 2, 0), A″(0, 2, −1), A‴(3, 0, −1)

또, 점 B(5, −4, 2)의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영을 각각 B′, B″, B‴이라 하면

B′(5, −4, 0), B″(0, −4, 2), B‴(5, 0, 2)

이때 선분 AB의 xy평면 위로의 정사영은 선분 A′B′이므로 xy평면 위로의 정사영의 길이는

$\overline{A'B'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2+0^2}=2\sqrt{10}$

선분 AB의 yz평면 위로의 정사영은 선분 A″B″이므로 yz평면 위로의 정사영의 길이는

$\overline{A''B''}=\sqrt{0^2+(-4-2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{5}$

선분 AB의 zx평면 위로의 정사영은 선분 A‴B‴이므로 zx평면 위로의 정사영의 길이는

$\overline{A'''B'''}=\sqrt{(5-3)^2+0^2+(2+1)^2}=\sqrt{13}$

답 xy평면: $2\sqrt{10}$, yz평면: $3\sqrt{5}$, zx평면: $\sqrt{13}$

219

두 점 A, B의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면 A′(0, −1, 2), B′(0, 2, 5)이고

$\overline{AB}=\sqrt{(3-6)^2+(2+1)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{3}$

$\overline{A'B'}=\sqrt{0^2+(2+1)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}$

이때 직선 AB와 yz평면이 이루는 예각의 크기가 θ이므로 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$에서

$3\sqrt{2}=3\sqrt{3}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

답 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

220

두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면 A′($\sqrt{2}$, 0, 3), B′(0, 0, k)이고

$\overline{AB}=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(4-1)^2+(k-3)^2}$

$=\sqrt{k^2-6k+20}$

$\overline{A'B'}=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+0^2+(k-3)^2}$

$=\sqrt{k^2-6k+11}$

이때 직선 AB와 zx평면이 이루는 각의 크기가 60°이므로 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos 60°$에서

$\sqrt{k^2-6k+11}=\sqrt{k^2-6k+20}\times\dfrac{1}{2}$

$2\sqrt{k^2-6k+11}=\sqrt{k^2-6k+20}$

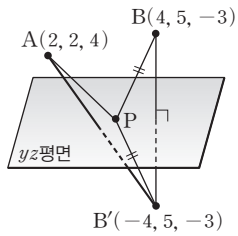
양변을 제곱하여 정리하면

$k^2-6k+8=0$, $(k-2)(k-4)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=4$

답 2, 4

221



두 점 A, B의 x좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표공간에서 yz평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

이때 점 B와 yz평면에 대하여 대칭인 점을 B′이라 하면

B′(−4, 5, −3)

즉, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$\geq\overline{AB'}$

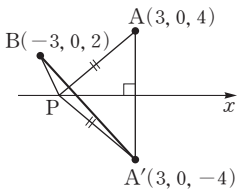
$=\sqrt{(-4-2)^2+(5-2)^2+(-3-4)^2}$

$=\sqrt{94}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{94}$이다.

답 $\sqrt{94}$

222



두 점 A, B의 y좌표가 0이고 z좌표의 부호가 같으므로 두 점은 zx평면 위의 점이고, x축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

이때 점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

A′(3, 0, −4)

즉, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(-3-3)^2+0^2+(2+4)^2}$

$=6\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

답 $6\sqrt{2}$

223

$\overline{AB}$를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times(-3)+1\times1}{3+1}, \dfrac{3\times1+1\times1}{3+1}, \dfrac{3\times5+1\times(-3)}{3+1}\right)$

$\therefore (-2, 1, 3)$

또, $\overline{AB}$를 3 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times(-3)-1\times1}{3-1}, \frac{3\times1-1\times1}{3-1}, \frac{3\times5-1\times(-3)}{3-1}\right)$

$\therefore (-5, 1, 9)$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이는

$\sqrt{(-5+2)^2+0^2+(9-3)^2}=3\sqrt{5}$

답 $3\sqrt{5}$

224

$\overline{AB}$를 k : 1로 내분하는 점이 yz평면 위에 있으므로 내분점의 x좌표는 0이다.

즉, $\frac{-3k+3}{k+1}=0$에서

$-3k+3=0$

$\therefore k=1$

답 1

225

$\overline{AB}$를 3 : 2로 내분하는 점이 zx평면 위에 있으므로 내분점의 y좌표는 0이다.

즉, $\frac{3b+6}{3+2}=0$에서

$3b+6=0 \quad \therefore b=-2$

또, $\overline{AB}$를 2 : 1로 외분하는 점이 y축 위에 있으므로 외분점의 x좌표와 z좌표는 모두 0이다.

즉, $\frac{2a-4}{2-1}=0$, $\frac{2c+1}{2-1}=0$에서

$2a-4=0$, $2c+1=0$

$\therefore a=2, c=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b+c=2+(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

226

사각형 ABCD가 평행사변형이므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$

$\therefore \left(\frac{1}{2}, 3, 4\right)$

점 D의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a-3}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+5}{2}\right)$

따라서 $\frac{a-3}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{b+1}{2}=3$, $\frac{c+5}{2}=4$이므로

$a=4, b=5, c=3$

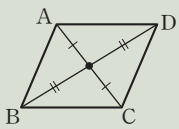
$\therefore$ D(4, 5, 3)

답 (4, 5, 3)

KEY Point

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

⇨ 평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치한다.



227

점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b-3}{2}, \frac{c+4}{2}\right)$

이때 $\overline{AC}$의 중점은 두 대각선의 교점과 일치하므로

$\frac{a+1}{2}=0$, $\frac{b-3}{2}=4$, $\frac{c+4}{2}=3$

$\therefore a=-1, b=11, c=2$

따라서 점 A의 좌표는 $(-1, 11, 2)$이므로 선분 AB의 길이는

$\sqrt{(-3+1)^2+(2-11)^2+(-4-2)^2}=11$

답 11

228

사각형 ABCD가 마름모이므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+b}{2}, \frac{-5+6}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$

$\therefore \left(\frac{1+b}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{3-2}{2}\right)$

$\therefore \left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

즉, $\frac{1+b}{2}=\frac{a}{2}$에서 $b=a-1$ ····· ㉠

또, 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$\overline{AB}=\overline{AD}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$에서

$(a-1)^2+(-1+5)^2+(3+2)^2$

$=(-1)^2+(2+5)^2+0^2$

$a^2-2a-8=0$, $(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$b=-2-1=-3$

$\therefore ab=(-2)\times(-3)=6$ **답 6**

229

점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+4+a}{3}, \frac{-3-1+b}{3}, \frac{1+2+c}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{6+a}{3}, \frac{-4+b}{3}, \frac{3+c}{3}\right)$

이 점이 점 G$(3, -2, -1)$과 일치하므로

$\frac{6+a}{3}=3$, $\frac{-4+b}{3}=-2$, $\frac{3+c}{3}=-1$

$\therefore a=3, b=-2, c=-6$

$\therefore$ C$(3, -2, -6)$ **답 $(3, -2, -6)$**

230

점 P$(1, 2, 3)$과

xy평면에 대하여 대칭인 점은 A$(1, 2, -3)$

yz평면에 대하여 대칭인 점은 B$(-1, 2, 3)$

zx평면에 대하여 대칭인 점은 C$(1, -2, 3)$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1-1+1}{3}, \frac{2+2-2}{3}, \frac{-3+3+3}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ **답 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$**

231

$\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times3+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times(-4)+1\times1}{2+1}, \frac{2\times2+1\times1}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+1\times3}{2+1}, \frac{2\times3+1\times(-4)}{2+1}, \frac{2\times(-6)+1\times2}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{13}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{10}{3}\right)$

$\overline{CA}$를 2 : 1로 내분하는 점 R의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-2)+1\times5}{2+1}, \frac{2\times1+1\times3}{2+1}, \frac{2\times1+1\times(-6)}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{13}{3}+\frac{1}{3}}{3}, \frac{-\frac{7}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}}{3}, \frac{\frac{5}{3}-\frac{10}{3}-\frac{4}{3}}{3}\right)$

$\therefore (2, 0, -1)$ **답 $(2, 0, -1)$**

KEY Point

삼각형의 세 변을 각각 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 연결한 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 일치한다.

232

답 ⑴ **중심의 좌표: $(3, -2, 0)$**

반지름의 길이: 3

⑵ **중심의 좌표: $(-2, -5, 3)$**

반지름의 길이: 4

233

⑶ 구의 반지름의 길이는 두 점 $(0, 3, -2)$, $(0, 0, 0)$ 사이의 거리이므로

$\sqrt{0^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 구의 방정식은
$x^2+(y-3)^2+(z+2)^2=13$

답 (1) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$
(2) $x^2+y^2+z^2=25$
(3) $x^2+(y-3)^2+(z+2)^2=13$

234

(1) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z+2=0$에서
$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=12$
∴ 중심의 좌표: $(1, 2, -3)$
반지름의 길이: $2\sqrt{3}$

(2) $x^2+y^2+z^2+6x-4y+9=0$에서
$(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=4$
∴ 중심의 좌표: $(-3, 2, 0)$
반지름의 길이: 2

답 (1) 중심의 좌표: $(1, 2, -3)$
반지름의 길이: $2\sqrt{3}$
(2) 중심의 좌표: $(-3, 2, 0)$
반지름의 길이: 2

235

(1) (반지름의 길이)=|중심의 z좌표|=5
∴ $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=25$

(2) (반지름의 길이)$=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$
∴ $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=13$

답 (1) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=25$
(2) $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=13$

236

구의 반지름의 길이는 두 점 $(2, -1, 2)$, $(1, 1, 0)$ 사이의 거리이므로
$\sqrt{(1-2)^2+(1+1)^2+(-2)^2}=3$
따라서 구하는 구의 방정식은
$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

답 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

다른풀이 구하는 구의 반지름의 길이를 r라 하면 구의 방정식은
$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=r^2$
이 구가 점 $(1, 1, 0)$을 지나므로
$(-1)^2+2^2+(-2)^2=r^2$
$r^2=9$ ∴ $r=3$ ($\because r>0$)
∴ $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

237

구의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$의 중점이므로
$C\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{-1-3}{2}\right)$
∴ $C(-1, 2, -2)$
또, 구의 반지름의 길이는
$\overline{CA}=\sqrt{(-3+1)^2+(1-2)^2+(-1+2)^2}$
$=\sqrt{6}$
따라서 구하는 구의 방정식은
$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=6$

답 $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=6$

238

$\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점을 P라 하면
$P\left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times2}{2+1}, \frac{2\times3+1\times(-3)}{2+1}\right)$
∴ $P(3, 0, 1)$
$\overline{AB}$를 2 : 1로 외분하는 점을 Q라 하면
$Q\left(\frac{2\times4-1\times1}{2-1}, \frac{2\times(-1)-1\times2}{2-1}, \frac{2\times3-1\times(-3)}{2-1}\right)$
∴ $Q(7, -4, 9)$
이때 구의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{PQ}$의 중점이므로
$C\left(\frac{3+7}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{1+9}{2}\right)$
∴ $C(5, -2, 5)$
또, 구의 반지름의 길이는
$\overline{CP}=\sqrt{(3-5)^2+2^2+(1-5)^2}$
$=2\sqrt{6}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-5)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=24$

답 $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=24$

239

구하는 구의 방정식을

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이라 하면

이 구가 두 점 $(0, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$을 지나므로

$D=0$, $16+4A+D=0$ $\therefore A=-4$

즉, 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2-4x+By+Cz=0$

또, 이 구가 두 점 $(-1, -1, 1)$, $(2, -2, -3)$을 지나므로

$7-B+C=0$, $9-2B-3C=0$

두 식을 연립하여 풀면

$B=6$, $C=-1$

따라서 구하는 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2-4x+6y-z=0$

답 $x^2+y^2+z^2-4x+6y-z=0$

240

구의 반지름의 길이는 두 점 $(-2, 1, 4)$, $(2, 3, 2)$ 사이의 거리이므로

$\sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{6}$

즉, 구하는 구의 방정식은

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=24$

$\therefore x^2+y^2+z^2+4x-2y-8z-3=0$

따라서 $a=4$, $b=-2$, $c=-8$, $d=-3$이므로

$a+b+c+d=-9$ **답 -9**

241

$x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z-k=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=k+14$

따라서 주어진 방정식이 구를 나타내려면

$k+14>0$이어야 하므로

$k>-14$

따라서 정수 k의 최솟값은 -13이다. **답 -13**

242

중심의 좌표가 $(4, k, 5)$이고 z축에 접하는 구의 방정식은

$(x-4)^2+(y-k)^2+(z-5)^2=16+k^2$

이 구의 반지름의 길이가 5이므로

$\sqrt{16+k^2}=5$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2=9$ $\therefore k=3$ ($\because k>0$) **답 3**

243

구가 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하고 점 $(-3, 2, 5)$를 지나므로 반지름의 길이를 r라 하면 구의 중심의 좌표는 $(-r, r, r)$

즉, 구의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

이 구가 점 $(-3, 2, 5)$를 지나므로

$(-3+r)^2+(2-r)^2+(5-r)^2=r^2$

$\therefore r^2-10r+19=0$ ····· ㉠

이때 두 구의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 그 곱은 이차방정식 ㉠의 두 근의 곱과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$r_1r_2=19$ **답 19**

244

구가 x축, y축, z축에 동시에 접하므로 구의 중심에서 x축, y축, z축에 이르는 거리가 모두 같다.

즉, 구의 중심을 $C(a, b, c)$라 하면

$|a|=|b|=|c|$

$\therefore a^2=b^2=c^2$ ····· ㉠

한편, 구의 중심에서 x축에 내린 수선의 발을 P라 하면

$P(a, 0, 0)$

이때 $\overline{CP}$의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$\sqrt{(a-a)^2+(-b)^2+(-c)^2}=4$

$\sqrt{2a^2}=4$ ($\because$ ㉠)

양변을 제곱하여 정리하면

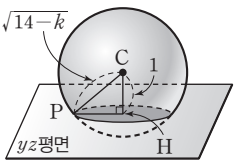
$a^2=8$ $\therefore a=\pm2\sqrt{2}$

따라서 구의 중심과 원점 사이의 거리는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3a^2}$ ($\because$ ㉠)
$=\sqrt{3\times 8}=2\sqrt{6}$ **답 $2\sqrt{6}$**

245

주어진 구의 방정식에 $x=0$을 대입하면 구와 yz평면의 교선의 방정식은
$y^2+z^2-4y+6z+k=0$
$\therefore (y-2)^2+(z+3)^2=13-k$
이 원의 반지름의 길이가 3이므로
$\sqrt{13-k}=3$
양변을 제곱하면
$13-k=9$ $\therefore k=4$ **답 4**

다른풀이 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+k=0$에서
$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=14-k$
오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C라 하고 점 C에서 yz평면에 내린 수선의 발을 H, 구와 yz평면의 교선 위의 점을 P라 하면



C$(-1, 2, -3)$, H$(0, 2, -3)$
이므로
$\overline{CP}=\sqrt{14-k}$, $\overline{CH}=1$
이때 직각삼각형 CPH에서
$\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{14-k})^2-1^2}$
$=\sqrt{13-k}$
따라서 $\sqrt{13-k}=3$이므로 양변을 제곱하면
$13-k=9$ $\therefore k=4$

246

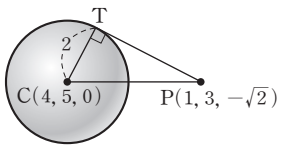
중심이 점 $(3, 6, 5)$이고 반지름의 길이가 10인 구의 방정식은
$(x-3)^2+(y-6)^2+(z-5)^2=100$
이 구의 방정식에 $y=0$을 대입하면 이 구와 zx평면의 교선의 방정식은
$(x-3)^2+(-6)^2+(z-5)^2=100$
$\therefore (x-3)^2+(z-5)^2=64$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 8이므로 그 둘레의 길이는
$2\pi\times 8=16\pi$ **답 16π**

247

구의 중심은 두 점 $(-2, -5, 5)$, $(6, -1, -3)$을 이은 선분의 중점이므로
$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-5-1}{2}, \frac{5-3}{2}\right)$
$\therefore (2, -3, 1)$
또, 반지름의 길이는 두 점 $(-2, -5, 5)$, $(2, -3, 1)$ 사이의 거리이므로
$\sqrt{(2+2)^2+(-3+5)^2+(1-5)^2}=6$
즉, 구의 방정식은
$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=36$
이 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면 이 구와 xy평면의 교선의 방정식은
$(x-2)^2+(y+3)^2+(-1)^2=36$
$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=35$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{35}$이므로 그 넓이는
$\pi\times(\sqrt{35})^2=35\pi$ **답 35π**

248

$x^2+y^2+z^2-8x-10y+37=0$에서
$(x-4)^2+(y-5)^2+z^2=4$
이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(4, 5, 0)$이고 반지름의 길이는 2이다.
오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 구 밖의 한 점 P에서 구에 그은 접선의 접점을 T라 하면



$\overline{PC}=\sqrt{(4-1)^2+(5-3)^2+(\sqrt{2})^2}$
$=\sqrt{15}$
따라서 구하는 접선의 길이는
$\overline{PT}=\sqrt{\overline{PC}^2-\overline{CT}^2}$
$=\sqrt{(\sqrt{15})^2-2^2}=\sqrt{11}$ **답 $\sqrt{11}$**

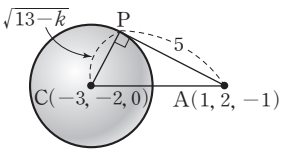
249

$x^2+y^2+z^2+6x+4y+k=0$에서

$(x+3)^2+(y+2)^2+z^2=13-k$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-3,\ -2,\ 0)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{13-k}$이다.

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 구 밖의 한 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면



$\overline{AC}=\sqrt{(-3-1)^2+(-2-2)^2+1^2}$

$=\sqrt{33}$

이때 접선의 길이는 5이므로

$\overline{PC}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{PA}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{33})^2-5^2}=2\sqrt{2}$

따라서 $\sqrt{13-k}=2\sqrt{2}$이므로 양변을 제곱하면

$13-k=8 \qquad \therefore\ k=5$ **답 5**

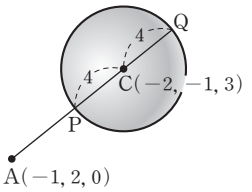
250

$x^2+y^2+z^2+4x+2y-6z-2=0$에서

$(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-2,\ -1,\ 3)$이고 반지름의 길이는 4이다.

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 직선 AC가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면



$\overline{AC}$

$=\sqrt{(-2+1)^2+(-1-2)^2+3^2}$

$=\sqrt{19}$

이때 선분의 길이의 최댓값은

$\overline{AQ}=\overline{AC}+\overline{CQ}=\sqrt{19}+4$

또, 선분의 길이의 최솟값은

$\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{CP}=\sqrt{19}-4$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$(\sqrt{19}+4)+(\sqrt{19}-4)=2\sqrt{19}$ **답 $2\sqrt{19}$**

Ⅰ. 이차곡선

1

꼭짓점의 좌표가 (0, 0)이므로 구하는 포물선의 방정식을 $y^2=4px$ 또는 $x^2=4py$ $(p\neq0)$라 하자.
이 포물선이 점 (4, 2)를 지나므로

(i) $y^2=4px$에서 $4=16p$ $\therefore p=\frac{1}{4}$
$\therefore y^2=x$

(ii) $x^2=4py$에서 $16=8p$ $\therefore p=2$
$\therefore x^2=8y$

(i), (ii)에서 구하는 포물선의 방정식은
$y^2=x$, $x^2=8y$ **답 $y^2=x$, $x^2=8y$**

2

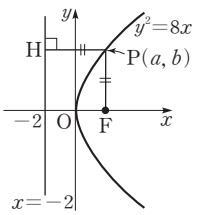
포물선 $(y-3k)^2=8k(x-k+1)$은 포물선 $y^2=8kx$를 x축의 방향으로 $k-1$만큼, y축의 방향으로 $3k$만큼 평행이동한 것이다.
포물선 $y^2=8kx$의
초점의 좌표는 $(2k, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2k$
이므로 주어진 포물선의
초점의 좌표는 $(3k-1, 3k)$,
준선의 방정식은 $x=-k-1$이다.
이때 점 $(3k-1, 3k)$가 y축 위에 있으므로
$3k-1=0$ $\therefore k=\frac{1}{3}$
따라서 준선의 방정식은 $x=-\frac{4}{3}$ **답 $x=-\frac{4}{3}$**

3

포물선 $y^2+2ay-4x+9=0$, 즉
$(y+a)^2=4\left(x-\frac{9-a^2}{4}\right)$은 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 $\frac{9-a^2}{4}$만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{9-a^2}{4}, -a\right)$
포물선 $x^2-2x-8y+b=0$, 즉
$(x-1)^2=8\left(y-\frac{b-1}{8}\right)$은 포물선 $x^2=8y$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $\frac{b-1}{8}$만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 좌표는
$\left(1, \frac{b-1}{8}\right)$
이때 두 점 $\left(\frac{9-a^2}{4}, -a\right)$, $\left(1, \frac{b-1}{8}\right)$이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$-a=1$에서 $a=-1$
$\frac{9-a^2}{4}=\frac{b-1}{8}$에서 $2=\frac{b-1}{8}$ $\therefore b=17$
$\therefore b-a=17-(-1)=18$ **답 18**

4

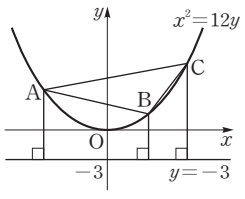
포물선 $y^2=8x=4\times2x$의 초점 F의 좌표는 (2, 0), 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH}=\overline{PF}=4$이므로



$a+2=4$ ($\because a>0$) $\therefore a=2$
이때 점 P는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로
$b^2=8\times2=16$ $\therefore b=4$ ($\because b>0$)
$\therefore a+b=2+4=6$ **답 ④**

5

포물선 $x^2=12y=4\times3y$의 준선의 방정식은
$y=-3$이다.
포물선 위의 세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 a, b, c라 하면 세 점에서 준선까지의 거리의 합이 21이므로



$(a+3)+(b+3)+(c+3)=21$

$\therefore a+b+c=12$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 y좌표는

$\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{12}{3}=4$ **답 4**

6

포물선 $y^2=kx=4\times\dfrac{k}{4}x$의 초점 F의 좌표는 $\left(\dfrac{k}{4},\ 0\right)$,

준선의 방정식은 $x=-\dfrac{k}{4}$이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 Q라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PQ}=\overline{PF}=4$

이때 직각삼각형 PFH에서

$\overline{FH}=4\cos 60^\circ=2$

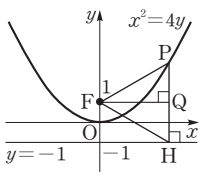
이므로 $\overline{PQ}=2\overline{OF}+\overline{FH}$에서

$2\times\dfrac{k}{4}+2=4,\ \dfrac{k}{2}=2 \qquad \therefore k=4$ **답 4**

7

포물선 $x^2=4y$의 초점 F의 좌표는 $(0,\ 1)$, 준선의 방정식은 $y=-1$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼각형 PFH가 정삼각형이므로 점 Q는 선분 PH를 이등분한다.



이때 점 Q의 y좌표는 점 F의 y좌표와 같으므로

$\overline{QH}=1-(-1)=2 \qquad \therefore \overline{PH}=2\overline{QH}=4$

따라서 점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ $(a>0)$이라 하면

$\overline{PH}=\dfrac{a^2}{4}-(-1)=4,\ a^2=12$

$\therefore a=2\sqrt{3}\ (\because a>0)$

$\therefore \mathrm{P}(2\sqrt{3},\ 3)$ **답 $(2\sqrt{3},\ 3)$**

다른풀이 포물선 $x^2=4y$의 초점 F의 좌표는 $(0,\ 1)$, 준선의 방정식은 $y=-1$이다.

점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ $(a>0)$이라 하면 $\mathrm{H}(a,\ -1)$

이때 삼각형 PFH가 정삼각형이므로 $\overline{FH}=\overline{PH}$

$\sqrt{a^2+(-1-1)^2}=\dfrac{a^2}{4}+1$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^4-8a^2-48=0,\ (a^2+4)(a^2-12)=0$

$a^2=12 \qquad \therefore a=2\sqrt{3}\ (\because a>0)$

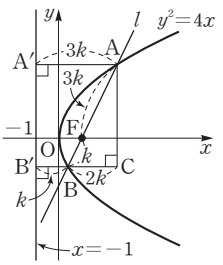
$\therefore \mathrm{P}(2\sqrt{3},\ 3)$

8

포물선 $y^2=4x$의 초점 F의 좌표는 $(1,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AA'},\ \overline{BF}=\overline{BB'}$



또, 점 A에서 $\overline{B'B}$의 연장선에 내린 수선의 발을 C라 하고 $\overline{AF}=3k\ (k>0)$라 하면 $\overline{AF}:\overline{BF}=3:1$이므로

$\overline{B'B}=\overline{BF}=k,\ \overline{B'C}=\overline{A'A}=3k$

이고

$\overline{BC}=\overline{B'C}-\overline{B'B}=3k-k=2k$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{(4k)^2-(2k)^2}=2\sqrt{3}k$

따라서 직선 l의 기울기는

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{2\sqrt{3}k}{2k}=\sqrt{3}$ **답 $\sqrt{3}$**

9

$x^2-8y+16=0$에서 $x^2=8(y-2)$

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P는 포물선 위의 점이므로

$a^2=8(b-2)$ ····· ㉠

선분 OP의 중점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{a}{2},\ y=\dfrac{b}{2}$

$\therefore a=2x,\ b=2y$ ····· ㉡

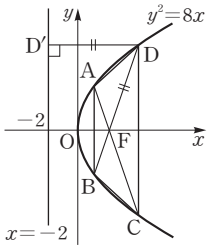
㉡을 ㉠에 대입하면 $(2x)^2=8(2y-2)$

$\therefore x^2=4(y-1)$ **답 ②**

10

포물선 $y^2=8x=4\times 2x$의 초점 F의 좌표는 $(2, 0)$,
준선의 방정식은 $x=-2$이다.

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 준선에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{DD'}=\overline{DF}=6$



즉, 점 D의 x좌표는 4이므로
$y^2=8\times 4=32$에서 $y=4\sqrt{2}$
$\therefore$ D$(4, 4\sqrt{2})$

한편, 점 B의 좌표를 (a, b) $(0<a<2, b<0)$라 하면 점 B는 포물선 위의 점이므로
$b^2=8a$ …… ㉠

이때 직선 BF의 기울기와 직선 FD의 기울기가 같으므로 $\frac{-b}{2-a}=\frac{4\sqrt{2}}{4-2}$에서 $b=2\sqrt{2}(a-2)$

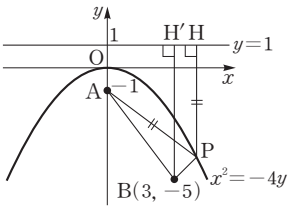
양변을 제곱하면
$b^2=8(a-2)^2$, $8a=8(a^2-4a+4)$ ($\because$ ㉠)
$a^2-5a+4=0$, $(a-1)(a-4)=0$
$\therefore a=1$ ($\because$ $0<a<2$)
$a=1$을 ㉠에 대입하면
$b^2=8$ $\therefore b=-2\sqrt{2}$ ($\because$ $b<0$)
$\therefore$ B$(1, -2\sqrt{2})$

이때 포물선 $y^2=8x$는 x축에 대하여 대칭이므로
A$(1, 2\sqrt{2})$, C$(4, -4\sqrt{2})$
따라서 사각형 ABCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(4\sqrt{2}+8\sqrt{2})\times 3=18\sqrt{2}$ **답 ⑤**

11

포물선 $x^2+4y=0$, 즉 $x^2=-4y$의 초점은
A$(0, -1)$, 준선의 방정식은 $y=1$이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AP}=\overline{PH}$이므로



$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{PH}+\overline{PB}$
$\geq\overline{BH'}$
$=1-(-5)=6$

이때 삼각형 ABP의 둘레의 길이는
$\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}+\overline{BH'}$
$=\sqrt{3^2+(-5+1)^2}+6$
$=5+6=11$

따라서 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 11이다. **답 11**

12

점 P(x, y)가 나타내는 도형은 두 초점 F$(\sqrt{2}, 0)$, F′$(-\sqrt{2}, 0)$에서의 거리의 합이 4인 타원이다.

두 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 타원의 방정식을
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$
이라 하자.

거리의 합이 4이므로 $2a=4$ $\therefore a=2$
$a^2-b^2=(\sqrt{2})^2$에서 $b^2=2^2-(\sqrt{2})^2=2$

$\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ …… ㉠

한편, 점 P(x, y)와 원점 사이의 거리는 $\sqrt{3}$이므로
$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3}$ $\therefore x^2+y^2=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x^2=2$, $y^2=1$
$\therefore x^2-y^2=1$ **답 1**

13

두 초점이 y축 위에 있으므로 타원의 방정식을
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$
이라 하자.

장축의 길이가 4이므로 $2b=4$ $\therefore b=2$
단축의 길이가 2이므로 $2a=2$ $\therefore a=1$
이때 $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$이므로 두 초점의 좌표는
$(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$
따라서 두 초점 사이의 거리는
$\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$ **답 $2\sqrt{3}$**

연습문제 실력 UP

14

타원 $\frac{(x-2)^2}{a}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$은 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또, 두 초점이 x축과 평행한 직선 위에 있으므로

$a>4$

이때 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{a-4}, 0), (-\sqrt{a-4}, 0)$

이므로 타원 $\frac{(x-2)^2}{a}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{a-4}+2, 2), (-\sqrt{a-4}+2, 2)$

이것이 $(6, b), (-2, b)$와 일치하므로

$\sqrt{a-4}+2=6$, $2=b$, $-\sqrt{a-4}+2=-2$에서

$a-4=16$, $b=2$

따라서 $a=20$, $b=2$이므로

$ab=40$ **답 ①**

15

$4x^2-24x+16y^2-64y+84=0$에서

$4(x-3)^2+16(y-2)^2=16$

$\therefore \frac{(x-3)^2}{4}+(y-2)^2=1$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

① 장축은 x축과 평행하다.

② 중심의 좌표는 $(3, 2)$이다.

③ 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$이므로

타원 $\frac{(x-3)^2}{4}+(y-2)^2=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{3}+3, 2), (-\sqrt{3}+3, 2)$

즉, 두 초점 사이의 거리는

$\sqrt{3}+3-(-\sqrt{3}+3)=2\sqrt{3}$

④ 장축의 길이는 $2\times2=4$, 단축의 길이는 $2\times1=2$이므로 장축의 길이는 단축의 길이의 2배이다.

⑤ 타원 위의 임의의 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로 $2\times2=4$

따라서 옳은 것은 ③이다. **답 ③**

16

삼각형 AF′F는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각

$(c, 0), (-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$\overline{FF'}=2c=6$ $\therefore c=3$

또, 타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{AF'}=2a=12$ $\therefore a=6$

따라서 $b^2=a^2-c^2=36-9=27$이므로

$a^2+b^2=36+27=63$ **답 63**

17

$5x^2+9y^2=45$에서 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

$\sqrt{9-5}=2$이므로 타원의 초점의 좌표는

$(2, 0), (-2, 0)$

즉, 점 A$(-2, 0)$은 타원의 한 초점이다.

한편, 포물선 $y^2=8x=4\times2x$의 초점의 좌표는

$(2, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

따라서 F$(2, 0)$이라 하면 타원과 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AP}+\overline{PQ}=\overline{AP}+\overline{PF}=2\times3=6$ **답 6**

18

A$(a, 0)$, A′$(-a, 0)$, F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하자.

삼각형 PA′A의 넓이가 삼각형 PF′F의 넓이의 2배이고 높이가 같으므로

$\overline{A'A}=2\overline{F'F}$

$a-(-a)=2\{c-(-c)\}$ $\therefore a=2c$ …… ㉠

또, 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$이고 삼각형 PF′F의 둘레의 길이가 6이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{F'F}=2a+2c=6$

$\therefore a+c=3$ …… ㉡

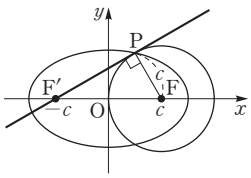
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

따라서 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$이므로

$a^2+b^2=4+3=7$ **답 7**

19

주어진 타원의 두 초점은 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{FF}'}=2c$



원의 반지름의 길이가 c이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=c$

한편, 직선 PF′은 원 위의 한 점 P에서의 접선이므로 $\angle \mathrm{F}'\mathrm{PF}=90^\circ$

즉, 삼각형 PF′F는 $\angle \mathrm{F}'\mathrm{PF}=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}=\sqrt{(2c)^2-c^2}=\sqrt{3}c$

이때 타원의 장축의 길이가 4이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=c+\sqrt{3}c=4$

$\therefore c=\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=2\sqrt{3}-2$ **답 ④**

다른풀이 $\overline{\mathrm{FF}'}=2c$, $\overline{\mathrm{PF}}=c$이고, 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=4$이므로

$\overline{\mathrm{PF}'}=4-c$

한편, 삼각형 PF′F는 $\angle \mathrm{F}'\mathrm{PF}=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$(4-c)^2+c^2=(2c)^2$, $c^2+4c-8=0$

$\therefore c=2\sqrt{3}-2\ (\because c>0)$

20

다리를 x축, 타원의 중심을 지나고 x축에 수직인 직선을 y축이라 하고 타원의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

이라 하자.

타원의 장축의 길이가 40 m이므로

$2a=40$ $\therefore a=20$

타원의 중심에서 아치의 높이가 12 m이므로

$b=12$

$\therefore \dfrac{x^2}{400}+\dfrac{y^2}{144}=1$ (단, $y\geq 0$) …… ㉠

이때 중심으로부터 10 m 떨어진 다리 위의 지점에서 아치의 높이가 h m이므로 ㉠에 $x=10$, $y=h$를 대입하면

$\dfrac{100}{400}+\dfrac{h^2}{144}=1$, $h^2=108$

$\therefore h=6\sqrt{3}\ (\because h>0)$ **답 $6\sqrt{3}$**

21

타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면

장축의 길이는 $2a$이고, 밑면의 지름의 길이는 20이므로

$2a\times\cos 45^\circ=20$ $\therefore a=10\sqrt{2}$

단축의 길이는 $2b$이므로

$2b=20$ $\therefore b=10$

이때 $\sqrt{(10\sqrt{2})^2-10^2}=10$이므로 두 초점의 좌표는

$(10,\ 0)$, $(-10,\ 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는 20이다. **답 20**

22

타원 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$의 또 다른 초점을 F′이라 하면

$\sqrt{100-36}=8$이므로 두 초점 F, F′의 좌표는 각각

$(8,\ 0)$, $(-8,\ 0)$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FP}_k}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_k}=2\times 10=20$ (단, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$)

주어진 타원은 y축에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_1}=\overline{\mathrm{FP}_9}$, $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_2}=\overline{\mathrm{FP}_8}$, $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_3}=\overline{\mathrm{FP}_7}$, $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_4}=\overline{\mathrm{FP}_6}$

또한, 직각삼각형 $\mathrm{P}_5\mathrm{OF}$에서

$\overline{\mathrm{FP}_5}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

$\therefore \overline{\mathrm{FP}_1}+\overline{\mathrm{FP}_2}+\overline{\mathrm{FP}_3}+\cdots+\overline{\mathrm{FP}_9}$

$=\overline{\mathrm{FP}_1}+\overline{\mathrm{FP}_2}+\overline{\mathrm{FP}_3}+\overline{\mathrm{FP}_4}+\overline{\mathrm{FP}_5}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_4}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_3}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_2}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_1}$

$=(\overline{\mathrm{FP}_1}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_1})+(\overline{\mathrm{FP}_2}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_2})+(\overline{\mathrm{FP}_3}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_3})+(\overline{\mathrm{FP}_4}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}_4})+\overline{\mathrm{FP}_5}$

$=4\times 20+10=90$ **답 90**

연습문제 실력 UP

23

$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$ $(b>a)$라 하면 타원의 정의에 의하여

$a+b=2\times3=6$ …… ㉠

$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{FF'}=2\sqrt{5}$

삼각형 PF′F는 $\angle FPF'=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2=20$ …… ㉡

㉠에서 $b=6-a$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$a^2+(6-a)^2=20$

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$, $b=4$ $(\because b>a)$

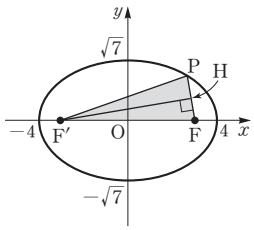
따라서 삼각형 QF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{QF}\times\overline{PF'}=\frac{1}{2}\times6\times4=12$ **답 12**

24

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$에서

$\sqrt{16-7}=3$이므로 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하면



F(3, 0), F′(−3, 0)

$\therefore \overline{F'F}=6$

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2\times4=8$

이때 $\overline{PF'}:\overline{PF}=3:1$이므로

$\overline{PF'}=3\overline{PF}$

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{PF}+3\overline{PF}=4\overline{PF}=8$

$\therefore \overline{PF}=2$, $\overline{PF'}=6$

한편, 삼각형 PF′F는 $\overline{F'P}=\overline{F'F}=6$인 이등변삼각형이므로 점 F′에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{FH}=\frac{1}{2}\overline{PF}=\frac{1}{2}\times2=1$

직각삼각형 F′FH에서

$\overline{F'H}=\sqrt{6^2-1^2}=\sqrt{35}$

따라서 삼각형 PFF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{F'H}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{35}=\sqrt{35}$ **답 $\sqrt{35}$**

25

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a, 0)$, $(0, b)$라 하면 선분 AB의 길이는 5이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=5$

$\therefore a^2+b^2=25$ …… ㉠

한편, 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{3\times0+2\times a}{3+2}=\frac{2a}{5}$

$y=\frac{3\times b+2\times0}{3+2}=\frac{3b}{5}$

$\therefore a=\frac{5x}{2}$, $b=\frac{5y}{3}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{5x}{2}\right)^2+\left(\frac{5y}{3}\right)^2=25$

$\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ **답 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$**

26

$a>0$이라 하면 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a$이므로 쌍곡선의 초점의 좌표를

$(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$

이라 하면

$c^2=a^2+b^2$ …… ㉠

또, 두 초점 사이의 거리가 주축의 길이의 4배이므로

$c-(-c)=4\times2a$ $\therefore c=4a$

$c=4a$를 ㉠에 대입하면

$(4a)^2=a^2+b^2$, $b^2=15a^2$

$\left(\frac{b}{a}\right)^2=15$ $\therefore \frac{b}{a}=\pm\sqrt{15}$

따라서 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm\sqrt{15}x$ **답 $y=\pm\sqrt{15}x$**

27

두 초점이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$

이라 하자.

조건 (가)에서 두 초점의 좌표가 $(5, 0)$, $(-5, 0)$이므로

$a^2+b^2=5^2=25$ …… ㉠

두 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$이고, 조건 (나)에서 두 점근선이 서로 수직이므로

$\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$ $\therefore b^2=a^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+a^2=25$, $a^2=\frac{25}{2}$

$\therefore a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ $(\because a>0)$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=2\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$ **답 ④**

28

$4x^2-y^2-24x+4y+28=0$에서

$4(x-3)^2-(y-2)^2=4$

$\therefore (x-3)^2-\frac{(y-2)^2}{4}=1$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 주축의 길이는 $2\times1=2$

ㄴ. 주축은 x축에 평행하다.

ㄷ. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표는

$(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$ ← $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

이므로 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(\sqrt{5}+3, 2)$, $(-\sqrt{5}+3, 2)$

ㄹ. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm2x$

이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y-2=\pm2(x-3)$

$\therefore y=2x-4$, $y=-2x+8$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄴ, ㄷ**

29

$x^2-y^2+2y+k=0$에서

$x^2-(y-1)^2=-k-1$

$\therefore \frac{x^2}{-k-1}-\frac{(y-1)^2}{-k-1}=1$ …… ㉠

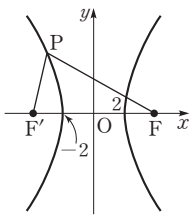
㉠이 x축에 평행한 주축을 갖는 쌍곡선의 방정식이 되려면 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 꼴이어야 하므로

$-k-1>0$ $\therefore k<-1$ **답 ①**

30

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$에서

$\sqrt{4+12}=4$이므로 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하면



$F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$

$\therefore \overline{FF'}=8$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF}-\overline{PF'}=2\times2=4$

이때 $\overline{PF}:\overline{PF'}=3:2$이므로

$\overline{PF}=3k$, $\overline{PF'}=2k$ $(k>0)$라 하면

$\overline{PF}-\overline{PF'}=3k-2k=4$ $\therefore k=4$

$\therefore \overline{PF}=12$, $\overline{PF'}=8$

따라서 삼각형 PFF′의 둘레의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{FF'}=12+8+8=28$ **답 28**

31

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$의 두 초점이 일치하므로

$a^2-c^2=b^2+c^2$ $\therefore 2c^2=a^2-b^2$ …… ㉠

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2|a|$이므로

$4+12=2|a|$ $\therefore |a|=8$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2|b|$이므로

$12-4=2|b|$ $\therefore |b|=4$

따라서 $|a|=8$, $|b|=4$를 ㉠에 대입하면

$2c^2=64-16=48$

$\therefore c^2=24$ **답 24**

연습문제 실력 UP

32

원 $x^2+y^2=8$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 모두 원점을 중심으로 하고 원점, x축, y축에 대하여 대칭인 도형이다.

즉, 원과 쌍곡선이 만나는 네 점이 원의 둘레를 4등분하려면 이 네 점은 원과 직선 $y=\pm x$의 교점이어야 한다.

이때 $x^2+y^2=8$에 $y=\pm x$를 대입하면

$x^2+x^2=8$, $x^2=4$

$\therefore x=\pm 2$

따라서 원과 직선 $y=\pm x$의 교점의 좌표는

$(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$

한편, 쌍곡선이 점 $(2, 2)$를 지나므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$ ····· ㉠

쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$이므로

$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}a$ $\therefore b^2=2a^2$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{4}{a^2}-\frac{4}{2a^2}=1$, $\frac{2}{a^2}=1$

$\therefore a^2=2$

이것을 ㉡에 대입하면 $b^2=4$

$\therefore a^2+b^2=2+4=6$ 답 ③

33

두 초점이 x축 위에 있으므로 평행이동하기 전의 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$

이라 하자.

주축의 길이가 4이므로 $2a=4$ $\therefore a=2$

$a^2+b^2=4^2$에서 $b^2=4^2-2^2=12$

$\therefore \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ ····· ㉠

쌍곡선 ㉠을 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$\frac{(x-6)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면 $\frac{x^2}{4}-\frac{(x-6)^2}{4}=0$

$12x-36=0$ $\therefore x=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면

$\frac{9}{4}-\frac{y^2}{12}=1$, $y^2=15$

$\therefore y=\pm\sqrt{15}$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(3, \sqrt{15})$, $(3, -\sqrt{15})$이므로 선분 AB의 길이는 $2\sqrt{15}$이다. 답 ④

34

$3x^2-4y^2+16y-28=0$에서

$3x^2-4(y-2)^2=12$

$\therefore \frac{x^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{3}=1$ ····· ㉠

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

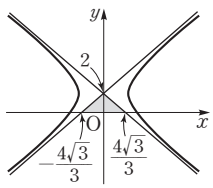
이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$이므로 ㉠의 점근선의 방정식은

$y-2=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$ $\therefore y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$

따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\times 2=\frac{8\sqrt{3}}{3}$



답 ⑤

35

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PF}=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$

점 P와 직선 $x=-1$ 사이의 거리는

$|x+1|$

이때 점 P에서 점 F에 이르는 거리와 직선 $x=-1$에 이르는 거리의 비가 2 : 1이므로

$\sqrt{(x+4)^2+y^2} : |x+1|=2:1$

$\sqrt{(x+4)^2+y^2}=2|x+1|$

양변을 제곱하여 정리하면

$3x^2-y^2=12$ **답 $3x^2-y^2=12$**

참고 $3x^2-y^2=12$에서 양변을 12로 나누면

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$이므로 점 P의 자취는 쌍곡선이다.

36

점 $P(a, b)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{16}-\frac{b^2}{9}=1$ …… ㉠

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$에서 $\sqrt{16+9}=5$이므로

$F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$

$\therefore \overline{F'F}=10$

이때 사각형 F′QFP의 넓이는 합동인 두 삼각형 PF′F, QFF′의 넓이의 합과 같으므로

$\square F'QFP=2\times\triangle PF'F$

$=2\times\frac{1}{2}\times\overline{FF'}\times b$

$=10b$

즉, $10b=60$에서 $b=6$

$b=6$을 ㉠에 대입하면

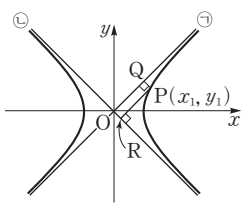
$\frac{a^2}{16}-\frac{36}{9}=1$ $\therefore a^2=80$

$\therefore a^2+b^2=80+36=116$ **답 116**

37

쌍곡선 $3x^2-4y^2=12$, 즉 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$



$\therefore \sqrt{3}x-2y=0$ …… ㉠

$\sqrt{3}x+2y=0$ …… ㉡

쌍곡선 위의 임의의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고, 점 P에서 직선 ㉠, ㉡에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면

$\overline{PQ}\times\overline{PR}=\frac{|\sqrt{3}x_1-2y_1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2)^2}}\times\frac{|\sqrt{3}x_1+2y_1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}}$

$=\frac{|3x_1^2-4y_1^2|}{7}$ …… ㉢

한편, 점 $P(x_1, y_1)$은 쌍곡선 $3x^2-4y^2=12$ 위의 점이므로

$3x_1^2-4y_1^2=12$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$\overline{PQ}\times\overline{PR}=\frac{12}{7}$ **답 $\frac{12}{7}$**

38

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$에서 $\sqrt{25-16}=3$이므로 두 초점의 좌표는

$(3, 0)$, $(-3, 0)$

이때 두 초점이 x축 위에 있으므로 타원과 두 초점을 공유하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$

이라 하면 $a^2+b^2=3^2=9$ …… ㉠

또, 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로

$\frac{b}{a}=\sqrt{35}$, $b=\sqrt{35}a$ $\therefore b^2=35a^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+35a^2=9$, $a^2=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$

따라서 쌍곡선의 두 꼭짓점의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

이므로 두 꼭짓점 사이의 거리는 1이다. **답 1**

39

두 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$

이라 하면 $a^2+b^2=(\sqrt{3})^2=3$ …… ㉠

또, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$

이때 두 점근선이 이루는 각의 크기가 60°이므로 기울기가 양수인 점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 30°이다.

즉, $\tan 30^\circ=\frac{b}{a}$이므로 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{b}{a}$

$\therefore a=\sqrt{3}b$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(\sqrt{3}b)^2+b^2=3$ $\therefore b^2=\frac{3}{4}$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=\frac{9}{4}$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$ $\therefore 4x^2-12y^2=9$

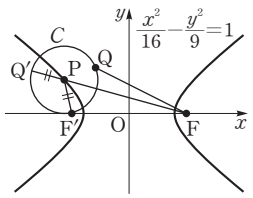
즉, $p=12$, $q=9$이므로

$p+q=21$ **답 21**

40

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF}-\overline{PF'}=2\times4=8$ ····· ㉠



위의 그림과 같이 직선 FP와 원의 교점 중 선분 FP 위의 점이 아닌 점을 Q′이라 할 때, 선분 FQ의 길이가 최대가 되려면 점 Q는 점 Q′의 위치에 있어야 한다.

이때 두 점 F′, Q′은 원 위의 점이므로

$\overline{PQ'}=\overline{PF'}$

선분 FQ의 길이의 최댓값이 14이므로

$\overline{FQ'}=\overline{PF}+\overline{PQ'}$

$=\overline{PF}+\overline{PF'}=14$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\overline{PF}=11$, $\overline{PF'}=3$

따라서 원 C의 반지름의 길이는 3이므로 구하는 넓이는

$\pi\times3^2=9\pi$ **답 ③**

41

ㄱ. $2x-4y+1=0$에서 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

이것을 $2y^2-x=0$에 대입하면

$2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2-x=0$

$\therefore 4x^2-4x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-4=0$

즉, 주어진 포물선은 직선 $2x-4y+1=0$과 접한다. (참)

ㄴ. $x-y+2=0$에서 $y=x+2$

이것을 $2y^2-x=0$에 대입하면

$2(x+2)^2-x=0$

$\therefore 2x^2+7x+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=7^2-4\times2\times8=-15<0$

즉, 주어진 포물선은 직선 $x-y+2=0$과 만나지 않는다. (참)

ㄷ. $x+y+1=0$에서 $y=-x-1$

이것을 $2y^2-x=0$에 대입하면

$2(-x-1)^2-x=0$

$\therefore 2x^2+3x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times2\times2=-7<0$

즉, 주어진 포물선은 직선 $x+y+1=0$과 만나지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답 ㄱ, ㄴ**

42

$n(A\cap B)=1$이므로 직선 $y=ax-2$와 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$은 한 점에서 만난다.

$y=ax-2$를 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{6}+\frac{(ax-2)^2}{3}=1$

$\therefore (2a^2+1)x^2-8ax+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4a)^2-(2a^2+1)\times 2=0$

$12a^2-2=0,\ a^2=\frac{1}{6}$

$\therefore a=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 또는 $a=\frac{1}{\sqrt{6}}$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은

$-\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=-\frac{1}{6}$ **답 $-\frac{1}{6}$**

43

직선 $y=x$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=-x$

이 직선을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-(x-k)$ $\therefore y=-x+k$

이것을 $y^2=-8x$에 대입하면

$(-x+k)^2=-8x$

$\therefore x^2-2(k-4)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-4)\}^2-k^2<0$

$-8k+16<0$ $\therefore k>2$ **답 $k>2$**

44

(i) $y=mx$를 $x^2-y^2=1$에 대입하면

$x^2-(mx)^2=1$

$\therefore (1-m^2)x^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=0-4\times(1-m^2)\times(-1)<0$

$m^2-1>0,\ (m+1)(m-1)>0$

$\therefore m<-1$ 또는 $m>1$

(ii) $y=mx$를 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=-1$에 대입하면

$\frac{x^2}{4}-\frac{(mx)^2}{64}=-1$

$\therefore (16-m^2)x^2+64=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=0-4\times(16-m^2)\times 64<0$

$m^2-16<0,\ (m+4)(m-4)<0$

$\therefore -4<m<4$

(iii) 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm x$

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=-1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{8}{2}x=\pm 4x$

(i), (ii), (iii)에서

$-4\le m\le -1$ 또는 $1\le m\le 4$

따라서 정수 m은 -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4의 8개이다. **답 ④**

45

$y=2x+a$를 $2x^2-y^2=-4$에 대입하면

$2x^2-(2x+a)^2=-4$

$\therefore 2x^2+4ax+a^2-4=0$ …… ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-2\times(a^2-4)$

$=2a^2+8>0$

즉, 이차방정식 ㉠은 실수 a의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 쌍곡선 $2x^2-y^2=-4$와 직선 $y=2x+a$의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 ㉠의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a$ …… ㉡

또, 두 점 A, B는 직선 $y=2x+a$ 위의 점이므로

A$(\alpha,\ 2\alpha+a)$, B$(\beta,\ 2\beta+a)$

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{(2\alpha+a)+(2\beta+a)}{2}\right)$, 즉

$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha+\beta+a\right)$

$\therefore (-a,\ -a)$ ($\because$ ㉡)

따라서 구하는 도형의 방정식은

$y=x$ **답 $y=x$**

연습문제 실력 UP

46

직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=2(x-k)$ $\therefore y=2x-2k$ ····· ㉠

포물선 $x+2y^2=0$, 즉 $y^2=-\frac{1}{2}x=4\times\left(-\frac{1}{8}\right)x$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2x+\frac{-\frac{1}{8}}{2}$ $\therefore y=2x-\frac{1}{16}$

이 직선이 직선 ㉠과 일치하므로

$-2k=-\frac{1}{16}$ $\therefore k=\frac{1}{32}$ **답 $\frac{1}{32}$**

다른풀이 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=2(x-k)$ $\therefore y=2x-2k$ ····· ㉠

㉠을 $x+2y^2=0$에 대입하면

$x+2(2x-2k)^2=0$

$8x^2+(1-16k)x+8k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(1-16k)^2-4\times8\times8k^2=0$

$-32k+1=0$ $\therefore k=\frac{1}{32}$

47

포물선 $y^2=-8x$ 위의 점과 직선 $2x+y-6=0$ 사이의 거리가 최소이려면 거리가 최소인 점에서의 접선이 직선 $2x+y-6=0$과 평행해야 한다.

직선 $2x+y-6=0$, 즉 $y=-2x+6$과 평행한 직선의 기울기는 -2이므로 포물선

$y^2=-8x=4\times(-2)x$에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x+\frac{-2}{-2}$ $\therefore y=-2x+1$

따라서 구하는 최솟값은 직선 $y=-2x+1$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $2x+y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|1-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ **답 $\sqrt{5}$**

48

포물선 $y^2=12x=4\times3x$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2\times3\times(x+a)$

$\therefore y=\frac{6}{b}x+\frac{6a}{b}$ ····· ㉠

또, 점 $Q(3, -6)$에서의 접선의 방정식은

$-6y=2\times3\times(x+3)$

$\therefore y=-x-3$ ····· ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 서로 수직이므로

$\frac{6}{b}\times(-1)=-1$ $\therefore b=6$

한편, 점 $P(a, 6)$이 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

$6^2=12a$ $\therefore a=3$

$\therefore ab=3\times6=18$ **답 18**

49

점 $P(a, b)$가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$b^2=4a$ ····· ㉠

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2(x+a)$

이 직선이 x축과 만나는 점은

$Q(-a, 0)$

이때 $\overline{PQ}=\sqrt{(2a)^2+b^2}=4\sqrt{3}$이므로

$4a^2+b^2=48$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4a^2+4a=48$, $a^2+a-12=0$

$(a+4)(a-3)=0$ $\therefore a=-4$ 또는 $a=3$

㉠에서 $a\geq0$이므로 $a=3$ $\therefore b^2=12$

$\therefore a^2+b^2=3^2+12=21$ **답 21**

50

포물선 $y^2=4x$의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$D(-1, 0)$

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $A(4, 4)$에서의 접선 l의 방정식은

$4y=2(x+4)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+2$ ····· ㉠

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$y=\frac{3}{2}$ $\therefore$ $B\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

㉠에 $y=0$을 대입하면 $x=-4$ $\therefore$ $C(-4, 0)$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$ **답 ③**

51

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 포물선 $y^2=12x=4\times 3x$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$y_1y=6(x+x_1)$

이 직선이 점 $P(-2, 0)$을 지나므로

$0=6(-2+x_1)$ $\therefore$ $x_1=2$ ····· ㉠

또, 점 (x_1, y_1)이 포물선 위의 점이므로

$y_1^2=12x_1$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $y_1^2=24$

$\therefore$ $x_1=2$, $y_1=-2\sqrt{6}$ 또는 $x_1=2$, $y_1=2\sqrt{6}$

따라서 $A(2, -2\sqrt{6})$, $B(2, 2\sqrt{6})$이라 하면 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{6}\times 4=8\sqrt{6}$ **답 $8\sqrt{6}$**

52

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 -1인 직선 l_1의 방정식은

$y=-x-p$

이것을 $y^2=4px$에 대입하면

$(-x-p)^2=4px$, $x^2-2px+p^2=0$

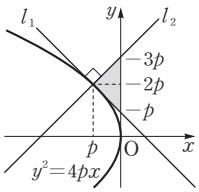
$(x-p)^2=0$ $\therefore$ $x=p$

즉, 포물선 $y^2=4px$와 직선 l_1의 접점의 좌표는 $(p, -2p)$

직선 l_1에 수직인 직선의 기울기는 1이므로 점 $(p, -2p)$를 지나고 기울기가 1인 직선 l_2의 방정식은

$y+2p=x-p$

$\therefore$ $y=x-3p$



이때 두 직선 l_1, l_2 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\times|-3p-(-p)|\times|p|=2$

$\frac{1}{2}\times(-2p)\times(-p)=2$

$p^2=2$ $\therefore$ $p=-\sqrt{2}$ ($\because$ $p<0$) **답 $-\sqrt{2}$**

53

포물선 $2y^2=x$, 즉 $y^2=\frac{1}{2}x=4\times\frac{1}{8}x$에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선 l의 방정식은

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{1}{4}}$ $\therefore$ $y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$ ····· ㉠

㉠을 $2y^2=x$에 대입하면

$2\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\right)^2=x$, $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\therefore$ $x=2$

$\therefore$ $A(2, -1)$

㉠을 $x^2=32y$에 대입하면

$x^2=32\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\right)$, $x^2+8x+16=0$

$(x+4)^2=0$ $\therefore$ $x=-4$

$\therefore$ $B\left(-4, \frac{1}{2}\right)$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-1+\frac{1}{2}}{2}\right)$ $\therefore$ $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$

답 $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$

54

접선의 기울기를 m ($m\neq 0$)이라 하면 포물선 $y^2=-8x=4\times(-2)x$에 접하고 기울기가 m ($m\neq 0$)인 직선의 방정식은

$y=mx-\frac{2}{m}$

이 직선이 점 $(a, 5)$를 지나므로

$5=am-\frac{2}{m}$ $\therefore$ $am^2-5m-2=0$ ····· ㉠

두 접선이 서로 수직이므로 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 실근의 곱은 -1이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{-2}{a}=-1$ $\therefore a=2$ **답 2**

55

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점 P가 포물선 $x^2=20y$ 위의 점이므로

$x_1^2=20y_1$ ····· ㉠

포물선 $x^2=20y=4\times5y$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x=2\times5\times(y+y_1)$ $\therefore y=\frac{x_1}{10}x-y_1$

이 직선의 x절편과 y절편이 각각 $\frac{10y_1}{x_1}$, $-y_1$이므로

$Q\left(\frac{10y_1}{x_1}, 0\right)$, $R(0, -y_1)$

이때 $\overline{PR}=k\overline{QR}$에서

$\sqrt{x_1^2+(2y_1)^2}=k\sqrt{\left(\frac{10y_1}{x_1}\right)^2+y_1^2}$

양변을 제곱하면

$x_1^2+4y_1^2=k^2\left(\frac{100y_1^2}{x_1^2}+y_1^2\right)$

$20y_1+4y_1^2=k^2\left(\frac{100y_1^2}{20y_1}+y_1^2\right)$ ($\because$ ㉠)

$4(5y_1+y_1^2)=k^2(5y_1+y_1^2)$

$k^2=4$ $\therefore k=2$ ($\because k>0$) **답 2**

56

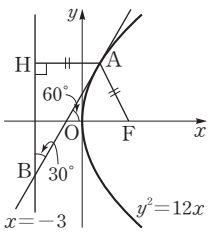
오른쪽 그림과 같이 점 A에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AH}$

이때 직각삼각형 AHB에서

$\overline{AB}=2\overline{AF}=2\overline{AH}$이므로

$\overline{AB}:\overline{AH}=2:1$



즉, $\angle ABH=30^\circ$이므로 직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°이다.

포물선 $y^2=12x=4\times3x$에 접하고 기울기가 $\tan60^\circ=\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+\frac{3}{\sqrt{3}}$ $\therefore y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$

이것을 $y^2=12x$에 대입하면

$(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2=12x$, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

따라서 점 A의 x좌표가 1이므로

$\overline{AF}=\overline{AH}=1-(-3)=4$

$\overline{AB}=2\overline{AF}=2\times4=8$

$\therefore \overline{AB}\times\overline{AF}=8\times4=32$ **답 32**

57

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°인 직선의 기울기는 $\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 접하고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\sqrt{3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}$

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\sqrt{2}$ **답 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\sqrt{2}$**

58

타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{2\times(-1)^2+4}$

$\therefore y=-x\pm\sqrt{6}$

이 직선이 점 (k, k)를 지나므로

$k=-k\pm\sqrt{6}$, $2k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ **답 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$**

59

점 $(2a, a)$가 타원 $3x^2+4y^2-12=0$ 위의 점이므로

$3\times(2a)^2+4a^2-12=0$

$16a^2-12=0$, $a^2=\frac{3}{4}$

$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because a>0$)

이때 타원 $3x^2+4y^2-12=0$ 위의 점 $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$3\times\sqrt{3}x+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}y-12=0$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x+2\sqrt{3}$

이 직선이 점 $(0, b)$를 지나므로

$b=2\sqrt{3}$

$\therefore ab=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=3$ **답 3**

60

타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{-x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}y=1$ $\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $\mathrm{Q}(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{4}+\frac{by}{9}=1$ $\therefore y=-\frac{9a}{4b}x+\frac{9}{b}$

두 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$와 $y=-\frac{9a}{4b}x+\frac{9}{b}$가 서로 평행하므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{9a}{4b}$

양변을 제곱하면

$\frac{1}{2}=\frac{81a^2}{16b^2}$ $\therefore 81a^2=8b^2$ …… ㉠

이때 점 $\mathrm{Q}(a, b)$가 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{9}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=\frac{8}{11}$, $b^2=\frac{81}{11}$

$\therefore a^2+b^2=\frac{89}{11}$ **답 $\frac{89}{11}$**

61

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 타원 $2x^2+3y^2=4$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$2x_1x+3y_1y=4$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(a, 0)$을 지나므로

$2ax_1=4$ …… ㉠

한편, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{OP}}$에서

$\sqrt{(x_1-a)^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

양변을 제곱하면

$x_1^2-2ax_1+a^2+y_1^2=x_1^2+y_1^2$

$-2ax_1+a^2=0$

이 식에 ㉠을 대입하면

$-4+a^2=0$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) **답 2**

62

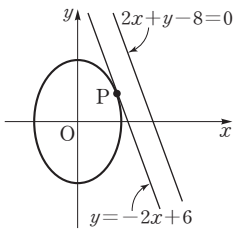
타원 $2x^2+y^2=12$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 직선 $2x+y-8=0$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P에서의 접선이 직선 $2x+y-8=0$과 평행해야 한다.

직선 $2x+y-8=0$, 즉 $y=-2x+8$과 평행한 직선의 기울기는 -2이므로 타원 $2x^2+y^2=12$, 즉 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=1$에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x\pm\sqrt{6\times(-2)^2+12}$

$\therefore y=-2x\pm6$

이때 점 P는 타원 $2x^2+y^2=12$와 직선 $y=-2x+6$의 접점이므로



$y=-2x+6$을 $2x^2+y^2=12$에 대입하면

$2x^2+(-2x+6)^2=12$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

$x=2$를 $y=-2x+6$에 대입하면 $y=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 2)$이므로

$a=2$, $b=2$ $\therefore a+b=4$ **답 ②**

다른풀이 타원 $2x^2+y^2=12$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 직선 $2x+y-8=0$, 즉 $y=-2x+8$ 사이의 거리가 최소가 되려면 점 P는 기울기가 -2인 접선의 접점이어야 한다.

타원 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$2ax+by=12$ $\quad\therefore y=-\dfrac{2a}{b}x+\dfrac{12}{b}$

이 직선의 기울기가 -2이므로

$-\dfrac{2a}{b}=-2$ $\quad\therefore a=b$ ····· ㉠

또, 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 타원 $2x^2+y^2=12$ 위의 점이므로

$2a^2+b^2=12$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=2$

$\therefore a+b=4$

63

타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{A}\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1$ $\quad\therefore x+2\sqrt{3}y-4=0$

타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$에서 $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$이므로 두 초점을 $\mathrm{F}(\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{3}, 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{FP}}=\dfrac{|\sqrt{3}-4|}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}}=\dfrac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\overline{\mathrm{F'Q}}=\dfrac{|-\sqrt{3}-4|}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}}=\dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\therefore \overline{\mathrm{FP}}\times\overline{\mathrm{F'Q}}=\dfrac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\times\dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$=1$ **답 1**

64

포물선과 타원이 만나는 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하자.

포물선 $y^2=2x=4\times\dfrac{1}{2}x$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2\times\dfrac{1}{2}\times(x+x_1)$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{y_1}x+\dfrac{x_1}{y_1}$

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{k^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{x_1x}{16}+\dfrac{y_1y}{k^2}=1$ $\quad\therefore y=-\dfrac{k^2x_1}{16y_1}x+\dfrac{k^2}{y_1}$

두 직선 $y=\dfrac{1}{y_1}x+\dfrac{x_1}{y_1}$, $y=-\dfrac{k^2x_1}{16y_1}x+\dfrac{k^2}{y_1}$이 서로 수직이므로

$\dfrac{1}{y_1}\times\left(-\dfrac{k^2x_1}{16y_1}\right)=-1$

$\therefore k^2x_1=16{y_1}^2$ ····· ㉠

또, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 포물선 $y^2=2x$ 위의 점이므로

${y_1}^2=2x_1$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $k^2x_1=16\times2x_1$, $k^2=32$

$\therefore k=4\sqrt{2}$ $(\because k>0)$ **답 $4\sqrt{2}$**

65

접선의 기울기를 m이라 하면 타원 $2x^2+y^2=6$, 즉 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{3m^2+6}$

이 직선이 점 $(k, 3)$을 지나므로

$3=km\pm\sqrt{3m^2+6}$

$3-km=\pm\sqrt{3m^2+6}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(k^2-3)m^2-6km+3=0$ ····· ㉠

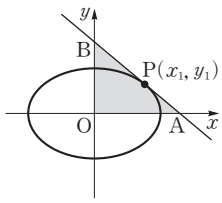
두 접선이 서로 수직이므로 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 실근의 곱은 -1이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{3}{k^2-3}=-1$, $k^2=0$ $\quad\therefore k=0$ **답 0**

66

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은



$\dfrac{x_1x}{16}+\dfrac{y_1y}{4}=1$

이 직선의 x절편은 $\frac{16}{x_1}$, y절편은 $\frac{4}{y_1}$이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{16}{x_1}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{4}{y_1}\right)$

삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times\frac{16}{x_1}\times\frac{4}{y_1}=\frac{32}{x_1y_1}$

또, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로

$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1$ ····· ㉠

이때 $\frac{x_1^2}{16}>0$, $\frac{y_1^2}{4}>0$이고 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이 제1사분면 위의 점이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}\geq 2\sqrt{\frac{x_1^2}{16}\times\frac{y_1^2}{4}}=\frac{x_1y_1}{4}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x_1^2}{16}=\frac{y_1^2}{4}\text{일 때 성립}\right)$

$1\geq\frac{x_1y_1}{4}$ ($\because$ ㉠) $\quad\therefore x_1y_1\leq 4$

따라서 $\frac{32}{x_1y_1}\geq\frac{32}{4}=8$이므로 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 8이다. **답 8**

KEY Point

산술평균과 기하평균의 관계

⇨ $a>0$, $b>0$일 때, $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

67

$\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{QF}}$라 하고, 점 Q의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0)$이라 하면 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{8}+\frac{y_1y}{2}=1$

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$y_1=1$

또, 점 $\mathrm{Q}(x_1, 1)$은 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{x_1^2}{8}+\frac{1}{2}=1$, $x_1^2=4$ $\quad\therefore x_1=2$ ($\because x_1>0$)

한편, 타원이 y축에 대하여 대칭이므로 두 점 P, Q도 y축에 대하여 대칭이다.

이때 타원의 나머지 초점을 F′이라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF'}}$이고, 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{QF}}=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

따라서 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{QF}}$

$=4+4\sqrt{2}$

즉, $a=4$, $b=4$이므로

$a^2+b^2=32$ **답 32**

68

직선 $y=-3x+1$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-3(x-k)+1$

$\therefore y=-3x+3k+1$

쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$에 접하고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y=-3x\pm\sqrt{3\times(-3)^2-2}$

$\therefore y=-3x\pm 5$

따라서 $3k+1=\pm 5$이므로

$k=\frac{4}{3}$ ($\because k>0$) **답 $\frac{4}{3}$**

다른풀이 직선 $y=-3x+1$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-3(x-k)+1$

$\therefore y=-3x+3k+1$

이것을 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{3}-\frac{(-3x+3k+1)^2}{2}=1$

$\therefore 25x^2-18(3k+1)x+27k^2+18k+9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-9(3k+1)\}^2-25\times(27k^2+18k+9)=0$

$3k^2+2k-8=0$, $(k+2)(3k-4)=0$

$\therefore k=\frac{4}{3}$ ($\because k>0$)

69

쌍곡선 $3x^2-4y^2=-12$, 즉 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=-1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{3-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{2}$ …… ㉠

이때 포물선 $y^2=ax=4\times\frac{a}{4}x$의 초점의 좌표는

$\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$

따라서 직선 ㉠이 점 $\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$을 지나므로

$0=\frac{a}{8}\pm\sqrt{2}$ $\therefore a=8\sqrt{2}\ (\because a>0)$ **답 $8\sqrt{2}$**

다른풀이 쌍곡선 $3x^2-4y^2=-12$, 즉 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=-1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{3-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{2}$

이 직선의 x절편은 $\pm2\sqrt{2}$이고, $a>0$이므로 포물선 $y^2=ax$의 초점의 좌표는 $(2\sqrt{2},\ 0)$이다.

따라서 점 $(2\sqrt{2},\ 0)$을 초점으로 하는 포물선의 방정식은 $y^2=4\times2\sqrt{2}\times x=8\sqrt{2}x$

$\therefore a=8\sqrt{2}$

70

쌍곡선 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점 $(\sqrt{2},\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{2}x}{a}-\frac{y}{b}=1$ $\therefore y=\frac{\sqrt{2}b}{a}x-b$

이 직선의 기울기가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{\sqrt{2}b}{a}=\sqrt{2}$ $\therefore a=b$ …… ㉠

또, 점 $(\sqrt{2},\ 1)$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점이므로

$\frac{2}{a}-\frac{1}{b}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=1$

$\therefore a+b=2$ **답 2**

71

쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점 $(b,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$bx-4y=a$ $\therefore y=\frac{b}{4}x-\frac{a}{4}$ …… ㉠

또, 쌍곡선 $x^2-4y^2=a$, 즉 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{\frac{a}{4}}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\frac{\sqrt{a}}{2}}{\sqrt{a}}x$ $\therefore y=\pm\frac{1}{2}x$ …… ㉡

점근선 ㉡ 중 한 직선이 직선 ㉠과 서로 수직이고, $b>0$이므로

$\frac{b}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ $\therefore b=8$

이때 점 $(8,\ 1)$은 쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점이므로

$64-4=a$ $\therefore a=60$

$\therefore a+b=60+8=68$ **답 ①**

72

쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{12}-\frac{by}{8}=1$

이 직선이 원 $(x-2)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2,\ 0)$을 지나야 하므로

$\frac{2a}{12}=1$ $\therefore a=6$ …… ㉠

또, 점 $(a,\ b)$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{12}-\frac{b^2}{8}=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3-\frac{b^2}{8}=1$, $b^2=16$ $\therefore b=-4\ (\because b<0)$

$\therefore a-b=6-(-4)=10$ **답 10**

73

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 쌍곡선 $x^2-3y^2=6$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x-3y_1y=6$

이 직선이 점 P(0, 2)를 지나므로

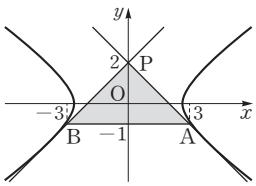
$-6y_1=6 \qquad \therefore y_1=-1$ ····· ㉠

또, 점 (x_1, y_1)이 쌍곡선 $x^2-3y^2=6$ 위의 점이므로

${x_1}^2-3{y_1}^2=6$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

${x_1}^2-3=6,\ {x_1}^2=9 \qquad \therefore x_1=\pm3$



따라서 A(3, −1), B(−3, −1)이라 하면 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times3=9$ **답 9**

74

접선의 기울기를 m $(m<0)$이라 하면 쌍곡선 $2x^2-y^2=2$, 즉 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx+\sqrt{m^2-2}$ ····· ㉠

이 직선의 x절편은 $-\frac{\sqrt{m^2-2}}{m}$, y절편은 $\sqrt{m^2-2}$이므로 직선 ㉠과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{m^2-2}}{m}\right)\times\sqrt{m^2-2}=-\frac{m^2-2}{2m}$

즉, $-\frac{m^2-2}{2m}=\frac{1}{2}$이므로

$m^2+m-2=0,\ (m+2)(m-1)=0$

$\therefore m=-2$ $(\because\ m<0)$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x+\sqrt{2}$ **답 $y=-2x+\sqrt{2}$**

참고 문제의 주어진 그림에서 직선의 y절편이 양수이므로 ㉠에서 y절편이 음수인 경우는 제외한다.

75

쌍곡선 $x^2-y^2=-3$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 방정식은

$x-2y=-3$ ····· ㉠

또, 쌍곡선 $x^2-y^2=-3$, 즉 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=-1$의 점근선의 방정식은

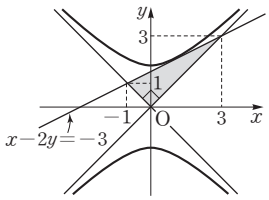
$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x \qquad \therefore y=\pm x$

(i) $x-2y=-3$과 $y=x$를 연립하여 풀면

$x=3,\ y=3$

(ii) $x-2y=-3$과 $y=-x$를 연립하여 풀면

$x=-1,\ y=1$



(i), (ii)에서 직선 ㉠과 두 점근선의 교점의 좌표는 각각 (3, 3), (−1, 1)

이때 두 점근선은 원점에서 수직으로 만나므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2}\times\sqrt{3^2+3^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=3$

답 3

76

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 P$(\sqrt{2}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{2}x}{4}+\frac{y}{2}=1 \qquad \therefore y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $P(\sqrt{2}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{2}x}{a^2}-\frac{y}{b^2}=1 \qquad \therefore y=\frac{\sqrt{2}b^2}{a^2}x-b^2$

두 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$, $y=\frac{\sqrt{2}b^2}{a^2}x-b^2$이 서로 수직이므로

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}b^2}{a^2}=-1 \qquad \therefore a^2=b^2$ ····· ㉠

또, 점 $P(\sqrt{2}, 1)$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{2}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=1$, $b^2=1$

$\therefore a^2+b^2=2$ **답 2**

77

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식이

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이므로

$\frac{|b|}{|a|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3} \qquad \therefore a^2=3b^2$ ····· ㉠

또, 한 초점이 $F(4\sqrt{3}, 0)$이므로

$a^2+b^2=(4\sqrt{3})^2=48$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=36$, $b^2=12$

점 P의 x좌표는 $4\sqrt{3}$이므로 $x=4\sqrt{3}$을 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$에 대입하면

$\frac{4}{3}-\frac{y^2}{12}=1$, $y^2=4 \qquad \therefore y=\pm2$

점 P는 제1사분면 위의 점이므로

$P(4\sqrt{3}, 2)$

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $P(4\sqrt{3}, 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4\sqrt{3}x}{36}-\frac{2y}{12}=1 \qquad \therefore y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-6$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다. **답 ①**

78

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 쌍곡선

$\frac{x^2}{3}-y^2=-1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{3}-y_1y=-1$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$\frac{x_1}{3}=-1 \qquad \therefore x_1=-3$ ····· ㉠

또, 점 (x_1, y_1)은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=-1$ 위의 점이므로

$\frac{x_1^2}{3}-y_1^2=-1$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3-y_1^2=-1$, $y_1^2=4 \qquad \therefore y_1=\pm2$

직선 l의 기울기는 양수이므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

한편, 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=-1$에서 $\sqrt{3+1}=2$이므로 두 초점의 좌표는 $(0, 2)$, $(0, -2)$

따라서 두 초점 $(0, 2)$, $(0, -2)$에서 각각 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, 즉 $x-2y-1=0$에 내린 수선의 길이의 곱은

$\frac{|-4-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\times\frac{|4-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=3$

답 3

79

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AC}|=\overrightarrow{AC}$

$=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

80

$\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}$

$=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA})$

$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$ 답 ③

81

② $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

④ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\neq\overrightarrow{CA}$

⑤ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

참고 ④ $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

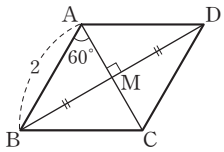
82

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AF}$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=-\vec{a}-\vec{b}$ 답 ①

83

오른쪽 그림과 같이 마름모 ABCD의 꼭짓점 A에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 $\overline{BD}$의 중점이다.



삼각형 ABM에서

$\overline{BM}=2\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

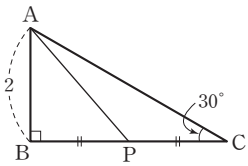
$\therefore\ \overline{BD}=2\overline{BM}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ |\overrightarrow{BD}|=\overline{BD}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

84

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$는 크기는 같지만 방향은 반대이므로 점 P는 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점이다.



삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\frac{\overline{AB}}{\tan 30^\circ}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 ABP에서

$\overline{PA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BP}^2=2^2+(\sqrt{3})^2=7$

$\therefore\ |\overrightarrow{PA}|^2=\overline{PA}^2=7$ 답 ③

85

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=-\vec{a}-\vec{b}$

따라서 $m=-1$, $n=-1$이므로

$m+n=-2$ 답 ①

86

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{AF}$

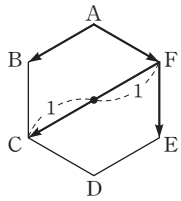
$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF})+\overrightarrow{FE}$

$=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FE}$

$=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FC}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{AF}|$

$=|\overrightarrow{FC}|=\overline{FC}=2$



답 2

87

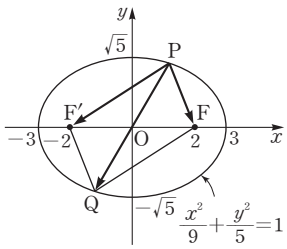
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$에서

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$

따라서 $\overline{DA}=\overline{CB}$이고 $\overline{DA}\parallel\overline{CB}$이므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다. 답 ③

88

사각형 PF′QF가 $\overline{PF}$, $\overline{PF'}$을 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형이 되도록 점 Q를 잡으면 점 Q는 오른쪽 그림과 같이 타원 위의 점이다.



이때 $\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}=\overrightarrow{PQ}$이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 타원의 장축의 길이와 같다.

따라서 타원의 장축의 길이는 $2\times3=6$이므로 $|\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}|$의 최댓값은 6이다. **답 ②**

89

① $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$

② $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$

③ $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BO}=2(-\vec{a}+\vec{b})$

$=-2\vec{a}+2\vec{b}$

④ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AB}$

$=(-\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}$

$=-2\vec{a}+\vec{b}$

⑤ $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CB}$

$=-\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BC}$

$=-(-\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}=\vec{a}-2\vec{b}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. **답 ③**

90

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}$

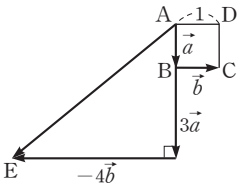
$=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

오른쪽 그림에서 $3\vec{a}-4\vec{b}$는 벡터 $\overrightarrow{AE}$와 같으므로

$|3\vec{a}-4\vec{b}|=|\overrightarrow{AE}|=\overline{AE}$

$=\sqrt{3^2+4^2}$

$=5$



답 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}$, $|3\vec{a}-4\vec{b}|=5$

91

$3\vec{x}+2\vec{y}=2\vec{a}-5\vec{b}$ …… ㉠

$2\vec{x}+4\vec{y}=3\vec{a}+5\vec{b}$ …… ㉡

㉠$\times2+$㉡을 하면

$8(\vec{x}+\vec{y})=7\vec{a}-5\vec{b}$

$\therefore \vec{x}+\vec{y}=\frac{7}{8}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$

따라서 $m=\frac{7}{8}$, $n=-\frac{5}{8}$이므로

$m+n=\frac{7}{8}+\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ **답 $\frac{1}{4}$**

다른풀이 $3\vec{x}+2\vec{y}=2\vec{a}-5\vec{b}$ …… ㉠

$2\vec{x}+4\vec{y}=3\vec{a}+5\vec{b}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\vec{x}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{15}{4}\vec{b}$, $\vec{y}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{25}{8}\vec{b}$

$\therefore \vec{x}+\vec{y}=\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{15}{4}\vec{b}\right)+\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{25}{8}\vec{b}\right)$

$=\frac{7}{8}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$

따라서 $m=\frac{7}{8}$, $n=-\frac{5}{8}$이므로

$m+n=\frac{7}{8}+\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

92

두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$와 $\vec{q}-\vec{r}$가 서로 평행하려면

$\vec{q}-\vec{r}=k(\vec{p}+\vec{q})$ …… ㉠

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 한다.

이때

$\vec{p}+\vec{q}=(\vec{a}-\vec{b})+(m\vec{a}+3\vec{b})$

$=(m+1)\vec{a}+2\vec{b}$

$\vec{q}-\vec{r}=(m\vec{a}+3\vec{b})-(2\vec{a}-5\vec{b})$

$=(m-2)\vec{a}+8\vec{b}$

이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$(m-2)\vec{a}+8\vec{b}=k\{(m+1)\vec{a}+2\vec{b}\}$

$\therefore (m-2)\vec{a}+8\vec{b}=k(m+1)\vec{a}+2k\vec{b}$

따라서 $m-2=k(m+1)$, $8=2k$이므로

$k=4$, $m=-2$ **답 -2**

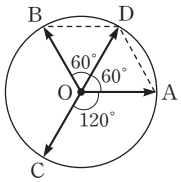
93

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}-\vec{b})-(-\vec{a}+2\vec{b})$
$=3\vec{a}-3\vec{b}$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-(-\vec{a}+2\vec{b})$
$=\vec{a}-\vec{b}$
이므로 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$
따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

답 풀이 참조

94

$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$이므로 $\angle AOB=120^\circ$
이고 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$
이때 오른쪽 그림과 같이
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$를 만족시키는 점 D에 대하여 $\angle AOD=60^\circ$이므로 $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OA}|$

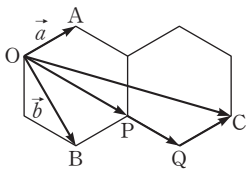


즉, 두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$는 크기가 같고 방향이 반대인 벡터이므로 $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}$
따라서 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OC}$이므로
$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|-2\overrightarrow{OC}|=2\overrightarrow{OC}$
$=2\times1=2$

답 2

95

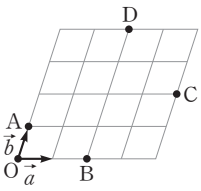
오른쪽 그림에서
$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b})$
한편, $\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{OA}=\vec{a}$이므로
$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QC}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}$
$=\frac{5}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$



답 $\frac{5}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

96

오른쪽 그림과 같이 점 O를 잡고 점 O를 시점으로 하는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 잡으면
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\vec{a}-\vec{b}$



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}+2\vec{b})-\vec{b}=4\vec{a}+\vec{b}$
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}+4\vec{b})-\vec{b}=2\vec{a}+3\vec{b}$
이때 $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$에서
$4\vec{a}+\vec{b}=m(2\vec{a}-\vec{b})+n(2\vec{a}+3\vec{b})$
$=(2m+2n)\vec{a}+(-m+3n)\vec{b}$
이므로 $4=2m+2n$, $1=-m+3n$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$m=\frac{5}{4}$, $n=\frac{3}{4}$
$\therefore m-n=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

97

ㄱ. $\vec{a}-\vec{c}=\vec{a}-(\vec{a}+2\vec{b})=-2\vec{b}$이므로
$\vec{a}-\vec{c}=k(\vec{a}+\vec{b})$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하지 않는다.
즉, 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{c}$는 평행하지 않다.
ㄴ. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$
$=2(\vec{a}+\vec{b})$
이므로 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}+\vec{c}$는 평행하다.
ㄷ. $\vec{b}-\vec{c}=\vec{b}-(\vec{a}+2\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$
$=-(\vec{a}+\vec{b})$
이므로 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{b}-\vec{c}$는 평행하다.
ㄹ. $\vec{b}+\vec{c}=\vec{b}+(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}+3\vec{b}$이므로
$\vec{b}+\vec{c}=k(\vec{a}+\vec{b})$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하지 않는다.
즉, 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{b}+\vec{c}$는 평행하지 않다.
따라서 $\vec{a}+\vec{b}$와 평행한 벡터는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

98

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}-5\vec{b})-\vec{a}=3\vec{a}-5\vec{b}$
$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=(-2\vec{a}+3\vec{b})-\vec{a}$
$=-3\vec{a}+3\vec{b}=3(\vec{b}-\vec{a})$
$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}=(-\vec{a}+2\vec{b})-\vec{a}$
$=-2\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{b}-\vec{a})$
따라서 $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{AB}$이므로 직선 AB 위에 있는 점은 Q, R이다.

답 Q, R

연습문제 실력 UP

99

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{F'O}$이므로

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{F'O}|=|\overrightarrow{F'P}|$

$\therefore |\overrightarrow{F'P}|=|\overrightarrow{PF'}|=4$

한편, 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF'}+\overline{PF}=2\times5=10$이므로

$|\overrightarrow{PF'}|+|\overrightarrow{PF}|=10$, $4+|\overrightarrow{PF}|=10$

$\therefore |\overrightarrow{PF}|=6$ **답 6**

100

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF})+\overrightarrow{AD}$

$=(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{AD}$

$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}$

이때 $\overline{AD}=2\times3=6$이므로

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|$

$=|3\overrightarrow{AD}|=3\overrightarrow{AD}$

$=3\times6=18$ **답 18**

101

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})-4\overrightarrow{OA}$

$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})-5\overrightarrow{OA}$

이때 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=-5\overrightarrow{OA}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}|=|-5\overrightarrow{OA}|$

$=5\overrightarrow{OA}$

$=5\times2=10$

답 10

102

$2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$에서

$2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$\therefore 2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$

즉, $\overrightarrow{DA}/\!/\overrightarrow{CB}$이고 $2|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|$이다.

따라서 사각형 ABCD는 길이가 다른 한 쌍의 대변이 평행하므로 사다리꼴이다.

이때 $\triangle AOD\backsim\triangle COB$이고 닮음비는

$\overline{DA}:\overline{BC}=1:2$

즉, $\overline{BO}=2\overline{DO}$이므로

$\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OD}$ $\therefore k=-2$ **답 −2**

103

ㄱ. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$에서

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PA}$

$\therefore \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$ (참)

ㄴ. 직사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 M이라 하면

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PM}$

그런데 ㄱ에서 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$이므로

$2\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PM}$ $\therefore \overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{PC}$

즉, $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$이므로 점 P는 선분 MC의 중점이다.

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\overline{AP}:\overline{AC}=3:4$이므로

$\triangle ADP:\triangle ADC=3:4$

$\therefore \triangle ADC=\frac{4}{3}\triangle ADP=\frac{4}{3}\times3=4$

즉, 직사각형 ABCD의 넓이는

$4\times2=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답 ⑤**

다른풀이 ㄴ. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$에서

$\overrightarrow{PA}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{CA}$

$4\overrightarrow{PA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$

$4\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$ ($\because$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$)

$2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}=-4\overrightarrow{PA}$, $3\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AP}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (참)

104

점 D가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=4:3$

즉, 점 D는 선분 BC를 4 : 3으로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AD}=\frac{4\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}}{4+3}$

$=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$

따라서 $m=\frac{3}{7}$, $n=\frac{4}{7}$이므로

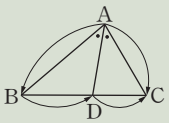
$m-n=-\frac{1}{7}$ 답 $-\frac{1}{7}$

KEY Point

삼각형의 내각의 이등분선의 성질

⇨ 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라 하면

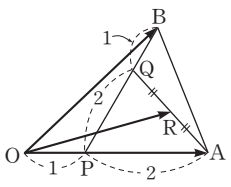
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$



105

점 P는 선분 OA를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{a}$



점 Q는 선분 BP를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1\times\overrightarrow{OP}+2\times\overrightarrow{OB}}{1+2}$

$=\frac{\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

$=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

점 R는 선분 AQ의 중점이므로

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}}{2}$

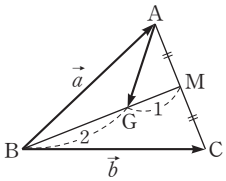
$=\frac{\vec{a}+\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)}{2}$

$=\frac{5}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ 답 $\frac{5}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

106

점 M이 선분 AC의 중점이므로

$\overrightarrow{BM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$



점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}$

$=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)-\vec{a}$

$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

따라서 $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$이므로

$m+n=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

107

$3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$3\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$

$\therefore \overrightarrow{PA}=\dfrac{-2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}}{3}$

$=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{2}$

이때 선분 BC의 중점을 M이라 하면

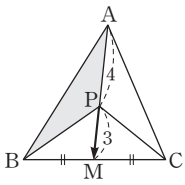
$\overrightarrow{PM}=\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{2}$

즉, $\overrightarrow{PA}=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{PM}$이므로

$3\overrightarrow{PA}=-4\overrightarrow{PM}$

따라서 점 P는 선분 AM을 $4:3$으로 내분하는 점이므로

$\overline{AP}:\overline{PM}=4:3$



$\therefore \triangle PAB=\dfrac{4}{7}\triangle ABM$

$=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{2}\times\triangle ABC$

$=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{2}\times 14=4$

답 4

108

(i) $m=1$, $n=0$이면 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}$

(ii) $m=0$, $n=1$이면 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}$

(iii) $m>0$, $n>0$, $m+n=1$이면 $n=1-m$이므로

$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$

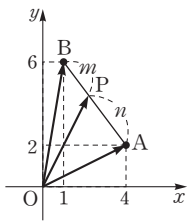
$=\dfrac{(1-m)\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OA}}{(1-m)+m}$

(i), (ii), (iii)에서 점 P는 선분 AB를 $(1-m):m$, 즉 $n:m$으로 내분하는 점이다.

따라서 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이므로 구하는 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(1-4)^2+(6-2)^2}$

$=5$



답 5

109

벡터 $\vec{a}$가 단위벡터이므로 $|\vec{a}|=1$

즉, $\sqrt{(x-2)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=1$에서 양변을 제곱하면

$(x-2)^2+\dfrac{16}{25}=1$

$(x-2)^2=\dfrac{9}{25}$, $x-2=\pm\dfrac{3}{5}$

$x-2=\dfrac{3}{5}$일 때, $x=\dfrac{13}{5}$

$x-2=-\dfrac{3}{5}$일 때, $x=\dfrac{7}{5}$

따라서 벡터 $\vec{a}$가 단위벡터가 되도록 하는 모든 실수 x의 값의 합은

$\dfrac{13}{5}+\dfrac{7}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

답 4

110

$\vec{x}+2\vec{y}=(5, 4)$ …… ㉠

$3\vec{x}-\vec{y}=(-6, 5)$ …… ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$7\vec{x}=(5, 4)+2(-6, 5)=(-7, 14)$

$\therefore \vec{x}=(-1, 2)$

이것을 ㉡에 대입하면

$3(-1, 2)-\vec{y}=(-6, 5)$

$\therefore \vec{y}=3(-1, 2)-(-6, 5)=(3, 1)$

$\therefore \vec{x}-\vec{y}=(-1, 2)-(3, 1)$

$=(-4, 1)$

답 ②

111

$\vec{a}+t\vec{b}=(2, -1)+t(-1, 1)$

$=(2-t, -1+t)$

$\therefore |\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(2-t)^2+(-1+t)^2}$

$=\sqrt{2t^2-6t+5}$

$=\sqrt{2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}$

따라서 $|\vec{a}+t\vec{b}|$는 $t=\dfrac{3}{2}$일 때 최솟값 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 갖는다.

답 $t=\dfrac{3}{2}$, 최솟값: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

112

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$의 시점을 좌표평면의 원점으로 놓고 각각 성분으로 나타내면

$\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(3, -1)$, $\vec{c}=(-3, -4)$

$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$에서

$$\begin{aligned}(-3, -4)&=p(2, 1)+q(3, -1)\\&=(2p, p)+(3q, -q)\\&=(2p+3q, p-q)\end{aligned}$$

$\therefore -3=2p+3q$, $-4=p-q$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$p=-3$, $q=1$

$\therefore p+q=-2$ **답 −2**

113

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

이때

$\overrightarrow{AC}=(1, x)-(0, 2)=(1, x-2)$,

$\overrightarrow{AB}=(3, 5)-(0, 2)=(3, 3)$

이므로

$(1, x-2)=k(3, 3)=(3k, 3k)$

따라서 $1=3k$, $x-2=3k$이므로

$k=\frac{1}{3}$, $x=3$ **답 3**

114

$$\begin{aligned}\vec{a}+x\vec{b}&=(4, -2)+x(0, 2)\\&=(4, 2x-2)\end{aligned}$$

벡터 $\vec{a}+x\vec{b}$의 크기가 8이므로

$\sqrt{4^2+(2x-2)^2}=8$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x-11=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 x의 값의 합은 2이다. **답 2**

115

$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AC}$에서

$(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})+3\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AC}$, $-\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AC}$

이때

$\overrightarrow{PB}=(-1, 3)-(a, b)=(-1-a, 3-b)$,

$\overrightarrow{AC}=(-2, 4)-(2, 2)=(-4, 2)$

이므로

$(-1-a, 3-b)=(-4, 2)$

따라서 $-1-a=-4$, $3-b=2$이므로

$a=3$, $b=1$

$\therefore ab=3$ **답 3**

다른풀이 원점 O(0, 0)에 대하여

$\overrightarrow{OA}=(2, 2)$, $\overrightarrow{OB}=(-1, 3)$, $\overrightarrow{OC}=(-2, 4)$,

$\overrightarrow{OP}=(a, b)$

이때 $\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AC}$에서

$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$

$=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$3\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$$\begin{aligned}&=(2, 2)+(-1, 3)-(-2, 4)\\&=(3, 1)\end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로 $ab=3$

116

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{v}+\vec{b}$가 서로 평행하므로

$k\vec{a}=\vec{v}+\vec{b}$ ($k\neq 0$)라 하면

$\vec{v}=k\vec{a}-\vec{b}$

$$\begin{aligned}&=k(3, 1)-(4, -2)\\&=(3k-4, k+2)\end{aligned}$$

$\therefore |\vec{v}|^2=(3k-4)^2+(k+2)^2$

$$\begin{aligned}&=10k^2-20k+20\\&=10(k-1)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $|\vec{v}|^2$은 $k=1$일 때 최솟값 10을 갖는다.

답 ⑤

연습문제 실력 UP

117

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{PA}=(1, 3)-(x, y)=(1-x, 3-y)$

$\overrightarrow{PB}=(3, 1)-(x, y)=(3-x, 1-y)$

$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(1-x, 3-y)+(3-x, 1-y)$

$=(4-2x, 4-2y)$

이때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=10$이므로

$\sqrt{(4-2x)^2+(4-2y)^2}=10$

양변을 제곱하면 $(4-2x)^2+(4-2y)^2=100$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=25$

따라서 점 P가 그리는 도형은 점 $(2, 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\times5=10\pi$ **답 10π**

118

$x^2+y^2-4x+6y-12=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

정삼각형의 무게중심은 정삼각형에 내접하는 원의 중심과 일치하므로 정삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 $G(2, -3)$이다.

이때 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$에서

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

$=3(2, -3)$

$=(6, -9)$

$\therefore |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=\sqrt{6^2+(-9)^2}=3\sqrt{13}$

답 $3\sqrt{13}$

119

직선 $y=-x+2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, -a+2)$라 하면

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\{(a, -a+2)-(2, 3)\}$

$+\{(a, -a+2)-(3, 2)\}$

$=(a-2, -a-1)+(a-3, -a)$

$=(2a-5, -2a-1)$

$\therefore |\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(2a-5)^2+(-2a-1)^2}$

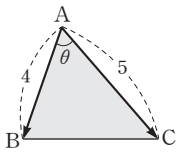
$=\sqrt{8a^2-16a+26}$

$=\sqrt{8(a-1)^2+18}$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$는 $a=1$일 때 최솟값 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$를 갖는다. **답 $3\sqrt{2}$**

120

오른쪽 그림과 같이 $\angle CAB=\theta$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{3}$이므로



$\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\sin\theta=5\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{2}\times4\times5\sin\theta=5\sqrt{3}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0^\circ<\theta<90^\circ$이므로 $\theta=60^\circ$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos60^\circ$

$=4\times5\times\dfrac{1}{2}$

$=10$ **답 ②**

121

네 점 $A(1, x)$, $B(2, -1)$, $C(5, 2)$, $D(x+2, 0)$에 대하여

$\overrightarrow{AC}=(5, 2)-(1, x)=(4, 2-x)$

$\overrightarrow{BD}=(x+2, 0)-(2, -1)=(x, 1)$

이때 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=14$이므로

$(4, 2-x)\cdot(x, 1)=14$

$4x+(2-x)=14$, $3x=12$

$\therefore x=4$ **답 4**

122

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$이고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$

$=3\times 2\times\frac{1}{2}=3$

$\therefore |2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=4\times 3^2-12\times 3+9\times 2^2$

$=36$

$\therefore |2\vec{a}-3\vec{b}|=6$ **답 6**

123

$\vec{a}=(x, -1)$, $\vec{b}=(2x-1, x+2)$이므로

$\vec{b}-\vec{a}=(2x-1, x+2)-(x, -1)$

$=(x-1, x+3)$

이때 $|\vec{b}-\vec{a}|=2\sqrt{10}$에서

$\sqrt{(x-1)^2+(x+3)^2}=2\sqrt{10}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2x-15=0$

$(x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x>0$)

따라서 $\vec{a}=(3, -1)$, $\vec{b}=(5, 5)$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times 5+(-1)\times 5=10$

$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\frac{10}{\sqrt{3^2+(-1)^2}\sqrt{5^2+5^2}}$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}$ **답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$**

124

ㄱ. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}$이면 $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$

$\therefore |\vec{a}|=|\vec{b}|$ (참)

ㄴ. [반례] $\vec{a}=(0, 0)$, $\vec{b}=(1, 0)$, $\vec{c}=(1, 1)$이면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$이지만 $\vec{b}\neq\vec{c}$ (거짓)

ㄷ. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a}=0$

$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

즉, 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}-\vec{a}$는 서로 수직이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답 ㄱ, ㄷ**

125

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=0$

즉, $|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서

$2^2-2t=0$ $\therefore t=2$ **답 ②**

126

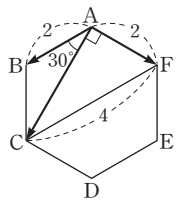
오른쪽 그림에서

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AF}|=2$, $\overline{CF}=4$

이므로 직각삼각형 ACF에서

$\overline{AC}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore |\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=2\sqrt{3}$



이때 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기는 30°, 두 벡터 $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기는 90°이므로

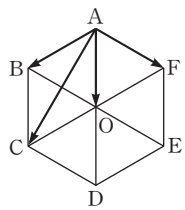
$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 30^\circ+|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{AC}|\cos 90^\circ$

$=2\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times 2\sqrt{3}\times 0=6$ **답 ⑤**

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$

이때 $|\overrightarrow{AO}|=2$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{3}$,

$\angle OAC=30^\circ$이므로

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|\cos 30^\circ$

$=2\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

127

$\vec{a}=(2, 0)$, $\vec{b}=(-1, 1)$이므로

$t\vec{a}+\vec{b}=t(2, 0)+(-1, 1)$

$=(2t-1, 1)$

$\vec{a}-t\vec{b}=(2, 0)-t(-1, 1)$

$=(2+t, -t)$

$\therefore f(t)=(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-t\vec{b})$

$=(2t-1, 1)\cdot(2+t, -t)$

$=(2t-1)(2+t)+(-t)$

$=2t^2+2t-2$

$=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$

따라서 $f(t)$는 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값을 갖는다.

답 $-\frac{1}{2}$

다른풀이 $\vec{a}=(2, 0)$, $\vec{b}=(-1, 1)$이므로

$|\vec{a}|^2=2^2=4$, $|\vec{b}|^2=(-1)^2+1^2=2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)=-2$

$\therefore f(t)=(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-t\vec{b})$

$=t|\vec{a}|^2+(1-t^2)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2$

$=4t-2(1-t^2)-2t$

$=2t^2+2t-2$

128

$|\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=12$

$4^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=12$

$20-2\vec{a}\cdot\vec{b}=12$ $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=4$

이때

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=4^2+2t\times4+t^2\times2^2$

$=4t^2+8t+16$

에서

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{4t^2+8t+16}$

$=\sqrt{4(t+1)^2+12}$

따라서 $|\vec{a}+t\vec{b}|$는 $t=-1$일 때 최솟값 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$을 갖는다. **답** $2\sqrt{3}$

129

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ $(90^\circ<\theta\le180^\circ)$라 하면

$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{-15}{6\times5}=\frac{1}{2}$

즉, $180^\circ-\theta=60^\circ$이므로 $\theta=120^\circ$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$|\vec{a}||\vec{b}|\sin(180^\circ-120^\circ)=6\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=15\sqrt{3}$ **답** $15\sqrt{3}$

130

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $5\vec{a}-2\vec{b}$가 서로 수직이므로

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(5\vec{a}-2\vec{b})=0$에서

$5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

이때 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$이므로

$5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{a}|^2=0$

$3\vec{a}\cdot\vec{b}=3|\vec{a}|^2$ $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}\ge0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$라 하면

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\times2|\vec{a}|}=\frac{1}{2}$

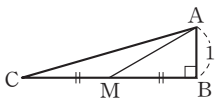
$\therefore \theta=60^\circ$ **답** 60°

131

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$이다.

오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AM}|=4$



$\therefore |\overrightarrow{AM}|=\overline{AM}=2$

따라서 직각삼각형 AMB에서

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=2\overline{BM}=2\sqrt{3}$ **답** ④

다른풀이 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$에서

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2=0$

이때 $\overline{AB}=1$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-1^2=0 \qquad \therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2$

$=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$

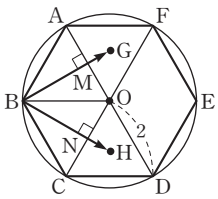
$=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}|^2-4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=4^2-4\times1=12$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

132

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BG}$와 $\overline{AO}$의 교점을 M이라 하면 두 삼각형 ABO, OFA는 모두 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로



$\overline{BM}=\overline{FM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$,

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{FM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore |\overrightarrow{BG}|=\overline{BM}+\overline{MG}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

같은 방법으로 $\overline{BH}$와 $\overline{CO}$의 교점을 N이라 하면

$|\overrightarrow{BH}|=\overline{BN}+\overline{NH}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

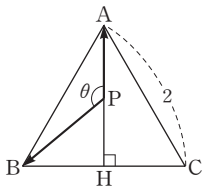
두 벡터 $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BH}$가 이루는 각의 크기는 60°이므로

$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BH}=|\overrightarrow{BG}||\overrightarrow{BH}|\cos60^\circ$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{3}$ **답 $\frac{8}{3}$**

133

오른쪽 그림과 같이 점 P가 $\overline{AH}$ 위의 점이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $90^\circ\le\theta\le180^\circ$이고



$|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$

$=|-|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos(180^\circ-\theta)|$

$=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\times\frac{|\overrightarrow{PH}|}{|\overrightarrow{BP}|}$

$=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PH}|$

$\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PH}$가 영벡터가 아닐 때, $|\overrightarrow{PA}|>0$, $|\overrightarrow{PH}|>0$

이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PH}|\ge2\sqrt{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PH}|}$

(단, 등호는 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PH}|$일 때 성립)

…… ㉠

이때

$|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PH}|=\overline{PA}+\overline{PH}=\overline{AH}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$

이므로 ㉠에서

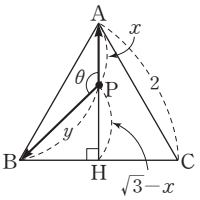
$\sqrt{3}\ge2\sqrt{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PH}|}$, $\sqrt{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PH}|}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore |\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PH}|\le\frac{3}{4}$

따라서 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이므로

$p=4$, $q=3 \qquad \therefore p+q=7$ **답 7**

다른풀이 1 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 2이므로



$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{PA}|=x$, $|\overrightarrow{PB}|=y$라 하면

$\overline{PH}=\sqrt{3}-x$

두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$90^\circ\le\theta\le180^\circ$이고 $\angle BPH=180^\circ-\theta$

$\therefore \cos(180^\circ-\theta)=\frac{\overline{PH}}{\overline{BP}}=\frac{\sqrt{3}-x}{y}$

즉,

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos(180^\circ-\theta)$

$=-x\times y\times\frac{\sqrt{3}-x}{y}$

$=x^2-\sqrt{3}x=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$

이므로

$|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=\left|\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right|$

$0 \le x \le \sqrt{3}$에서 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은

$\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$이므로

$p=4,\ q=3$

$\therefore\ p+q=7$

다른풀이 2 $\overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$이고 점 P가 선분 AH 위에 있으므로 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AH}\ (0\le k\le 1)$라 하면

$\overrightarrow{AP}=\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\therefore\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=\frac{k}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos 60^\circ)$

$=\frac{k}{2}\left(2^2+2\times 2\times\frac{1}{2}\right)$

$=3k$

또,

$|\overrightarrow{AP}|^2=|k\overrightarrow{AH}|^2=k^2|\overrightarrow{AH}|^2$

$=k^2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\right)^2=3k^2$

이므로

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})$

$=-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AP}|^2$

$=-3k+3k^2$

$=3\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$

따라서 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$는 $0\le k\le 1$에서 $k=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$을 가지므로

$p=4,\ q=3$

$\therefore\ p+q=7$

KEY Point

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0,\ b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

134

$\overrightarrow{BA}=\vec{a},\ \overrightarrow{BC}=\vec{c}$라 하면

$|\vec{a}|=3,\ |\vec{c}|=4$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ=3\times 4\times\frac{1}{2}=6$

이때 점 P는 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\vec{a}$ $\quad\therefore\ \overrightarrow{PB}=-\frac{2}{3}\vec{a}$

또, 점 Q는 $\overline{BC}$의 중점이므로

$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$

$=-\frac{2}{3}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=-\frac{2}{3}\times 3^2+\frac{1}{2}\times 6$

$=-3$ **답 −3**

다른풀이 점 P는 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{BP}=\frac{2}{3}\overline{AB}=2$

$\overline{BC}$의 중점이 Q이므로 $\overline{BQ}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2$

즉, 삼각형 PBQ에서 $\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\angle PBQ=60^\circ$이므로 삼각형 PBQ는 정삼각형이다.

$\therefore\ |\overrightarrow{PQ}|=\overline{PQ}=2,\ \angle BPQ=60^\circ$

또, $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이고 $\angle APQ=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{CD}$가 이루는 각의 크기는 120°이다.

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=-|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{CD}|\cos(180^\circ-120^\circ)$

$=-2\times 3\times\frac{1}{2}=-3$

135

세 점 A(1, 1), B(−1, 3), C(−3, 0)을 각각 x축의 방향으로 −1만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 점을

O(0, 0), B′(−2, 2), C′(−4, −1)

이라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 OB′C′의 넓이와 같다.

$\overrightarrow{OB'}=(-2, 2)$, $\overrightarrow{OC'}=(-4, -1)$이고

$|\overrightarrow{OB'}|^2=(-2)^2+2^2=8$,

$|\overrightarrow{OC'}|^2=(-4)^2+(-1)^2=17$,

$\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OC'}=(-2)\times(-4)+2\times(-1)=6$

이므로

$$\triangle ABC=\triangle OB'C'$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB'}|^2|\overrightarrow{OC'}|^2-(\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OC'})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{8\times17-6^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times10=5$$

답 5

다른풀이 $\overrightarrow{OB'}=(-2, 2)$, $\overrightarrow{OC'}=(-4, -1)$이므로

$$\triangle ABC=\triangle OB'C'$$
$$=\frac{1}{2}|(-2)\times(-1)-2\times(-4)|$$
$$=\frac{1}{2}\times10=5$$

136

이차방정식 $x^2-ax+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a>0$, $\alpha\beta=b>0$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이므로

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$$

즉, $1^2=\beta^2-2\times1+\alpha^2$에서

$\alpha^2+\beta^2=3$ …… ㉠

또, 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{\sqrt{5}}{4}$이므로

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2\beta^2-1^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$\therefore \alpha^2\beta^2=\frac{9}{4}$

그런데 $\alpha\beta>0$이므로

$\alpha\beta=\frac{3}{2}$ …… ㉡

이때 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로 이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$3=a^2-2\times\frac{3}{2}$, $a^2=6$

$\therefore a=\sqrt{6}$ ($\because a>0$)

답 $\sqrt{6}$

137

$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하므로

$\overrightarrow{OH}=(4k, 2k)$

$\therefore \overrightarrow{HP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OH}$

$=(2-4k, 2-2k)$

이때 $\overrightarrow{HP}\perp\overrightarrow{OQ}$이므로 $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$에서

$(2-4k, 2-2k)\cdot(4, 2)=0$

$4(2-4k)+2(2-2k)=0$

$12-20k=0$ $\therefore k=\frac{3}{5}$

따라서 $\overrightarrow{OH}=\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$이므로

$m=\frac{12}{5}$, $n=\frac{6}{5}$

$\therefore m+n=\frac{18}{5}$

답 $\frac{18}{5}$

138

직선 $2(x+1)=\frac{1-y}{2}$, 즉 $x+1=\frac{y-1}{-4}$의 방향벡터는 $(1, -4)$이므로 이 직선에 평행한 직선의 방향벡터는 $(1, -4)$이다.

즉, 점 $(3, 2)$를 지나고 방향벡터가 $(1, -4)$인 직선의 방정식은

$x-3=\frac{y-2}{-4}$

위의 식에 $x=1$을 대입하면 $y=10$

따라서 ④ $(1, -10)$은 이 직선 위의 점이 아니다.

답 ④

139

$\mathrm{P}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(-\frac{1}{2}, -4\right)-\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

두 벡터 $\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 서로 평행하므로

$\vec{u}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ $(k\neq 0)$에서

$\vec{u}=\left(-\frac{3}{2}k, -\frac{9}{2}k\right)$

이때 $|\vec{u}|=\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{\left(-\frac{3}{2}k\right)^2+\left(-\frac{9}{2}k\right)^2}=\sqrt{10}$

양변을 제곱하여 정리하면 $k^2=\frac{4}{9}$

$\therefore k=-\frac{2}{3}$ 또는 $k=\frac{2}{3}$

따라서

$k=-\frac{2}{3}$일 때 $\vec{u}=(1, 3)$,

$k=\frac{2}{3}$일 때 $\vec{u}=(-1, -3)$

이므로

$a=1$, $b=3$ 또는 $a=-1$, $b=-3$

$\therefore |a-b|=2$ 답 ②

140

두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5, -1)-(1, 3)$

$=(4, -4)$

이므로 두 점 A, B를 지나는 직선에 평행한 직선의 방향벡터는 $(4, -4)$이다.

즉, 점 $(2, 7)$을 지나고 방향벡터가 $(4, -4)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-2}{4}=\frac{y-7}{-4}$

$\therefore x+y-9=0$ …… ㉠

또, 직선 $\frac{x-1}{2}=6-y$, 즉 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-6}{-1}$의 방향벡터는 $(2, -1)$이므로 이 직선에 수직인 직선의 법선벡터는 $(2, -1)$이다.

즉, 점 $(-2, 3)$을 지나고 법선벡터가 $(2, -1)$인 직선의 방정식은

$2(x+2)-(y-3)=0$

$\therefore 2x-y+7=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{25}{3}$

따라서 $m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{25}{3}$이므로

$mn=\frac{50}{9}$ 답 $\frac{50}{9}$

141

주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하면

$\vec{u}=(4, 3)$, $\vec{v}=(7, -1)$이므로

$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|4\times 7+3\times(-1)|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{7^2+(-1)^2}}$

$=\frac{25}{25\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

142

세 직선 l_1, l_2, l_3의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$라 하면

$\vec{u}=(1, 2)$, $\vec{v}=(a, 4)$, $\vec{w}=(3, b)$

$l_1 /\!/ l_2$이므로 $\vec{u}=k\vec{v}$ $(k\neq 0)$에서

$(1, 2)=k(a, 4)$

$1=ak$, $2=4k$ $\therefore k=\frac{1}{2}$, $a=2$

또, $l_2\perp l_3$이므로 $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$에서

$(a, 4)\cdot(3, b)=0$

$3a+4b=0$

위의 식에 $a=2$를 대입하면 $b=-\frac{3}{2}$

$\therefore ab=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$ 답 -3

143

$x+1=\frac{y+13}{3}$, $\frac{x+4}{2}=\frac{5-y}{3}$를 연립하여 풀면

$x=2$, $y=-4$

따라서 두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표는 $(2, -4)$이므로 점 $(2, -4)$를 지나고 벡터 $\vec{n}=(-3, 2)$에 수직인 직선의 방정식은

$-3(x-2)+2(y+4)=0$

$\therefore 3x-2y-14=0$ **답 $3x-2y-14=0$**

144

두 접선의 법선벡터는 각각

$\overrightarrow{OA}=(-1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{OB}=(a, b)$

두 접선이 서로 수직이므로 두 접선의 법선벡터도 서로 수직이다.

즉, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$에서

$(-1, \sqrt{3})\cdot(a, b)=0$

$-a+\sqrt{3}b=0$ $\therefore a=\sqrt{3}b$ …… ㉠

한편, 점 $B(a, b)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

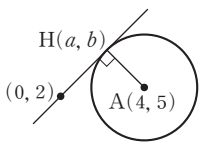
$a^2+b^2=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\sqrt{3}$, $b=1$ ($\because b>0$)

$\therefore ab=\sqrt{3}$ **답 $\sqrt{3}$**

145



접점을 $H(a, b)$라 하면

$\overrightarrow{AH}=(a-4, b-5)$

이때 $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$에서

$(a-4, b-5)\cdot(1, 2)=0$

$(a-4)+2(b-5)=0$

$\therefore a+2b=14$ …… ㉠

또, 접선의 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 2)$이고 점 $(0, 2)$를 지나므로 접선의 방정식은

$x=\frac{y-2}{2}$

이때 점 $H(a, b)$는 직선 $x=\frac{y-2}{2}$ 위의 점이므로

$a=\frac{b-2}{2}$ $\therefore 2a-b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=6$

따라서 구하는 접점의 좌표는 $(2, 6)$이다. **답 $(2, 6)$**

146

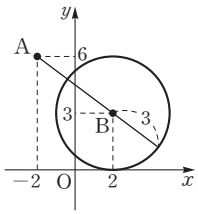
점 P의 위치벡터를 $\vec{p}=(x, y)$라 하면

$(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=9$에서

$(x-2, y-3)\cdot(x-2, y-3)=9$

$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=9$

즉, 점 P는 중심이 B(2, 3)이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.



이때 $|\vec{p}-\vec{a}|=|\overrightarrow{AP}|$는 두 점 A, P 사이의 거리이고

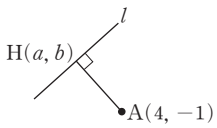
$\overline{AB}=\sqrt{(2+2)^2+(3-6)^2}=5$

이므로 $|\vec{p}-\vec{a}|$의 최댓값은 $5+3=8$,

최솟값은 $5-3=2$

답 최댓값: 8, 최솟값: 2

147



점 H의 좌표를 (a, b)라 하면

점 H는 직선 l 위의 점이므로

$\frac{a+1}{2}=b+1$

$\therefore a-2b=1$ …… ㉠

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\vec{u}=(2, 1)$이고

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$에서

$(a-4, b+1)\cdot(2, 1)=0$

$2(a-4)+(b+1)=0$

$\therefore 2a+b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=1$

따라서 점 H의 좌표는 $(3, 1)$이므로

$\overrightarrow{AH}=(3, 1)-(4, -1)=(-1, 2)$

$\therefore |\overrightarrow{AH}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ **답 $\sqrt{5}$**

148

점 M은 선분 AB의 중점이므로

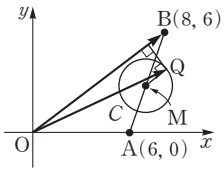
$\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\overrightarrow{PM}$ $\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$

이때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$이므로

$2|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{10}$ $\therefore |\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

즉, 점 P는 중심이 점 M이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$인 원 위의 점이다.

이 원을 C라 하면 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$가 최대가 되도록 하는 점 P의 위치는 다음 그림과 같이 직선 OB에 수직인 직선과 원 C의 접점 중 선분 OP의 길이가 가장 길 때이다.



이때의 점 P는 점 Q와 같고, 직선 OB에 수직이면서 점 Q를 지나는 직선과 직선 MQ는 수직이므로

$\overrightarrow{OB}/\!/\overrightarrow{MQ}$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$가 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기와 같다.

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=6\times8+0\times6=48\geq0$이므로

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$

$=\frac{48}{\sqrt{6^2+0^2}\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{4}{5}$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}$

$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{MQ}|\cos\theta$

$=6\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{4}{5}$ ← $|\overrightarrow{MQ}|=|\overrightarrow{PM}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$=\frac{12\sqrt{10}}{5}$

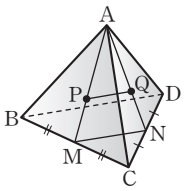
답 ③

149

ㄱ. 직선 AD와 직선 BC는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄴ. 직선 CD와 직선 BQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$의 연장선과 $\overline{BC}$의 교점을 M, $\overline{AQ}$의 연장선과 $\overline{CD}$의 교점을 N이라 하면 두 점 P, Q는 각각 두 삼각형 ABC, ACD의 무게중심이므로



$\overline{PQ}/\!/\overline{MN}$, $\overline{MN}/\!/\overline{BD}$

$\therefore \overline{PQ}/\!/\overline{BD}$

따라서 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

150

직선 AC와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 BE, 직선 DE, 직선 EF의 3개이므로

$a=3$

직선 AC와 평행한 평면은 평면 DEF의 1개이므로

$b=1$

평면 ABC와 평행한 직선은 직선 DE, 직선 EF, 직선 DF의 3개이므로

$c=3$

$\therefore a-b+c=3-1+3=5$ **답 5**

151

정육면체의 꼭짓점과 모서리를 연장한 직선으로 결정되는 서로 다른 평면을 구할 때는 평행한 두 직선으로 만들어지는 경우와 어느 두 점도 한 모서리 위에 있지 않은 세 점으로 만들어지는 경우로 나누어 구한다.

(i) 평행한 두 직선으로 만들어지는 경우

평면 ABCD, 평면 EFGH, 평면 AEFB, 평면 DHGC, 평면 BFGC, 평면 AEHD, 평면 ABGH, 평면 BCHE, 평면 CDEF, 평면 DAFG, 평면 AEGC, 평면 BFHD

⇨ 12개

(ii) 어느 두 점도 한 모서리 위에 있지 않은 세 점으로 만들어지는 경우

평면 ACF, 평면 ACH, 평면 BDE, 평면 BDG, 평면 EGB, 평면 EGD, 평면 HFA, 평면 HFC

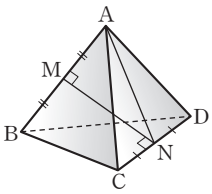
⇨ 8개

(i), (ii)에서 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수는

$12+8=20$ **답 20**

152

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 M, N이라 하면 $\overline{AB}\perp\overline{MN}$, $\overline{CD}\perp\overline{MN}$이므로 두 모서리 AB, CD 사이의 거리는 선분 MN의 길이와 같다.



이때 삼각형 AMN은 직각삼각형이고

$\overline{AM}=\frac{1}{2}$, $\overline{AN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{MN}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$**

참고 정삼각형 ACD의 한 변의 길이는 1이고 $\overline{AN}$은 높이이므로 $\overline{AN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

153

$\overline{PQ}/\!/\overline{AC}$, $\overline{SR}/\!/\overline{AC}$이므로 $\overline{PQ}/\!/\overline{SR}$

$\overline{PS}/\!/\overline{BD}$, $\overline{QR}/\!/\overline{BD}$이므로 $\overline{PS}/\!/\overline{QR}$

즉, 사각형 PQRS는 평행사변형이다.

$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$이라 하면

$\triangle PBQ\backsim\triangle ABC$이므로

$\overline{PQ}:\overline{AC}=\overline{PB}:\overline{AB}=n:(m+n)$

$\therefore \overline{PQ}=\frac{n}{m+n}\overline{AC}=\frac{5n}{m+n}$

또, $\triangle APS \backsim \triangle ABD$이므로

$\overline{PS}:\overline{BD}=\overline{AP}:\overline{AB}=m:(m+n)$

$\therefore \overline{PS}=\frac{m}{m+n}\overline{BD}=\frac{5m}{m+n}$

따라서 구하는 둘레의 길이는

$2(\overline{PQ}+\overline{PS})=2\times\frac{5m+5n}{m+n}$

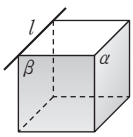
$=\frac{10(m+n)}{m+n}=10$ **답 10**

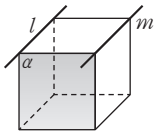
KEY Point

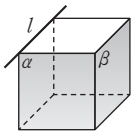
사면체 ABCD에서 $\overline{AC}=\overline{BD}=a$일 때, 이 사면체를 두 모서리 AC, BD에 평행한 평면으로 잘라 생기는 단면인 사각형의 둘레의 길이는 ⇨ $2a$

154

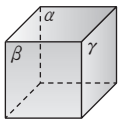
① [반례] 오른쪽 그림의 정육면체에서 $l \parallel \alpha$, $\alpha \perp \beta$이지만 $l \perp \beta$이다.

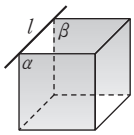


② 

③ 

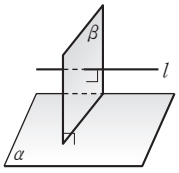
④ [반례] 오른쪽 그림의 정육면체에서 $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$이지만 $\alpha \perp \beta$이다.

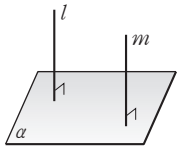


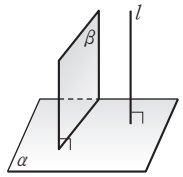
⑤ 

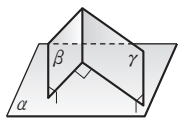
따라서 옳지 않은 것은 ①, ④이다. **답 ①, ④**

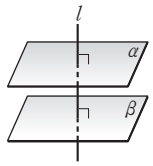
다른풀이

① [반례] 

② 

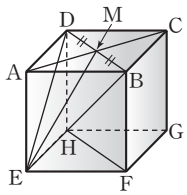
③ 

④ [반례] 

⑤ 

155

$\overleftrightarrow{FH} \parallel \overleftrightarrow{BD}$이므로 직선 FH와 직선 EM이 이루는 각의 크기는 $\overline{BD}$와 $\overline{EM}$이 이루는 각의 크기와 같다.



이때 삼각형 BDE는 정삼각형이고, 점 M은 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 교점이므로 $\overline{BD}$의 중점이다.

$\therefore \overleftrightarrow{EM} \perp \overleftrightarrow{BD}$

따라서 직선 FH와 직선 EM이 이루는 각의 크기는 90°이다. **답 90°**

156

$\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

직각삼각형 PAQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{14^2-(4\sqrt{6})^2}=10$

따라서 직각삼각형 PQO에서

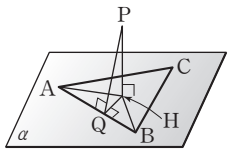
$\overline{OQ}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ **답 $\frac{3}{5}$**

157

$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HQ} \perp \overline{AB}$



점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고, 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로 삼각형 ABH에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{HQ}=\frac{1}{3}\times 24$

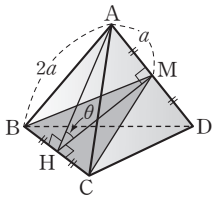
$\frac{1}{2}\times 8\times\overline{HQ}=8 \qquad \therefore\ \overline{HQ}=2$

따라서 직각삼각형 PQH에서

$\overline{PQ}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ 답 ②

158

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 H라 하면 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$, $\overline{MH}\perp\overline{BC}$이므로 평면 ABC와 평면 MBC가 이루는 각의 크기는 $\overline{AH}$와 $\overline{MH}$가 이루는 각의 크기와 같다.



$\therefore\ \angle AHM=\theta$

정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면

$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2a=\sqrt{3}a$

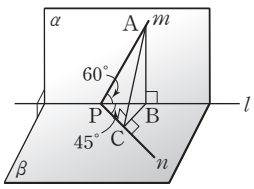
이때 $\overline{AM}=a$이므로 직각삼각형 AHM에서

$\overline{MH}=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2-a^2}=\sqrt{2}a$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{AH}}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

159

오른쪽 그림과 같이 직선 m 위의 한 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 B에서 직선 n에 내린 수선의 발을 C라 하면 $\overline{AB}\perp\beta$, $\overline{BC}\perp n$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{AC}\perp n$

즉, 두 직선 m, n이 이루는 각의 크기는 $\angle APC$의 크기와 같으므로

$\angle APC=\theta$

이때 $\overline{PA}=a$라 하면 두 직각삼각형 APB, PBC에서

$\overline{PB}=\overline{PA}\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a$

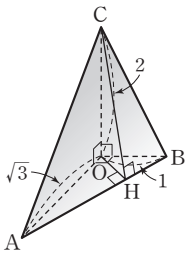
$\overline{PC}=\overline{PB}\cos 45^\circ=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$

따라서 직각삼각형 APC에서

$\cos\theta=\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

160

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CO}\perp$(평면 OAB), $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{CH}\perp\overline{AB}$

직각삼각형 OAB에서

$\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$이고,

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{1}{2}\times 2\times\overline{OH}$

$\therefore\ \overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 직각삼각형 OHC에서

$\overline{CH}=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

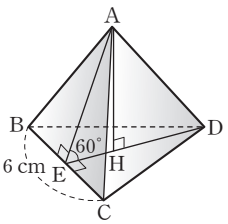
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{19}}{2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

답 ③

161

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 E라 하고, 점 A에서 $\overline{DE}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$, $\overline{DE}\perp\overline{BC}$, $\overline{AH}\perp\overline{DE}$이므로 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{AH}\perp$(평면 BCD)

삼각형 ABC에서

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AE}=18$, $\frac{1}{2}\times6\times\overline{AE}=18$

$\therefore\ \overline{AE}=6(\text{cm})$

한편, 삼각형 AEH에서

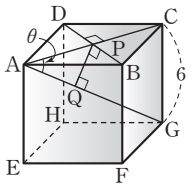
$\overline{AH}=\overline{AE}\sin 60^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}(\text{cm})$

따라서 사면체의 부피는

$\frac{1}{3}\times\triangle BCD\times\overline{AH}=\frac{1}{3}\times15\times3\sqrt{3}=15\sqrt{3}(\text{cm}^3)$

답 $15\sqrt{3}$ cm^3

162



$\overline{GC}\perp$(평면 BCD)이므로

$\overline{BD}\perp\overline{GC}$

또, $\overline{BD}\perp\overline{AC}$이므로

$\overline{BD}\perp$(평면 AGC)

이때 점 P는 $\overline{BD}$와 평면 AGC의 교점, 즉 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점이다.

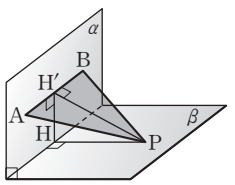
$\angle CAG=\theta$라 하면 $\overline{AG}=6\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 AGC에서

$\sin\theta=\frac{\overline{CG}}{\overline{AG}}=\frac{6}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 AQP에서

$\overline{PQ}=\overline{AP}\sin\theta=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{6}$ **답 $\sqrt{6}$**

163



오른쪽 그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{HH'}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PH'}\perp\overline{AB}$

한편, 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로

$\overline{HH'}=2$

또, 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로

$\overline{PH}=4$

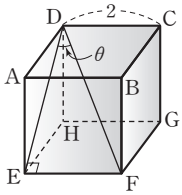
이때 직각삼각형 PH′H에서

$\overline{PH'}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH'}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=15$ **답 15**

164



오른쪽 그림과 같이 점 F에서 평면 AEHD에 내린 수선의 발은 점 E이므로 $\overline{DF}$의 평면 AEHD 위로의 정사영은 $\overline{DE}$이다.

즉, 직선 DF와 평면 AEHD가 이루는 각의 크기 θ는 $\overline{DE}$, $\overline{DF}$가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle FDE=\theta$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이가 2이므로

$\overline{DE}=2\sqrt{2}$, $\overline{DF}=2\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 DEF에서

$\cos\theta=\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ **답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$**

165

직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 30°이므로

$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos30^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

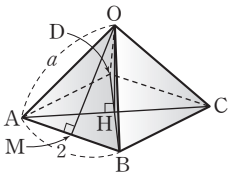
직선 BC와 평면 β는 평행하므로

$\overline{B'C'}=\overline{BC}=6$

따라서 사각형 A′B′C′D′의 둘레의 길이는

$2(3\sqrt{3}+6)=6\sqrt{3}+12$ **답 $6\sqrt{3}+12$**

166



오른쪽 그림과 같이 점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 HAB이다.

이때 점 H는 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이므로

$\triangle HAB=\frac{1}{4}\times 2\times 2=1$

한편, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 직각삼각형 OAM에서

$\overline{OM}=\sqrt{a^2-1}$

$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{a^2-1}=\sqrt{a^2-1}$

따라서 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기가 45°이므로 $\triangle HAB=\triangle OAB\cos 45^\circ$에서

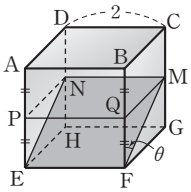
$1=\sqrt{a^2-1}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{a^2-1}=\sqrt{2}$, $a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$ **답 $\sqrt{3}$**

167

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$, $\overline{BF}$의 중점을 각각 P, Q라 하고 평면 AEFB와 평면 NEFM이 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$\theta=\angle MFQ$

직각삼각형 MQF에서

$\overline{QF}=1$, $\overline{MF}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

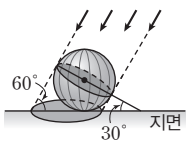
$\cos\theta=\frac{\overline{QF}}{\overline{MF}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\square AEFB=2\times 2=4$이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\square AEFB\cos\theta=4\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **답 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$**

168

오른쪽 그림과 같이 애드벌룬이 지면과 접하도록 이동하면 태양 광선과 수직으로 만나는 구의 지름이 지면과 이루는 각의 크기는



$180^\circ-(90^\circ+60^\circ)=30^\circ$

이때 그림자의 넓이를 S, 애드벌룬의 중심을 지나는 단면인 원의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cos 30^\circ$

애드벌룬의 반지름의 길이를 r m라 하면

$\pi r^2=6\sqrt{3}\pi\cos 30^\circ$

$\pi r^2=6\sqrt{3}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r^2=9$

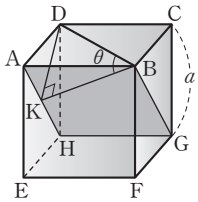
$\therefore r=3\ (\because r>0)$

따라서 애드벌룬의 반지름의 길이는 3 m이다.

답 3 m

169

오른쪽 그림과 같이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a, $\overline{AH}$의 중점을 K라 하면



$\overline{DK}\perp\overline{AH}$ …… ㉠

또, $\overline{AB}\perp$(평면 AEHD)이므로 $\overline{DK}\perp\overline{AB}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{DK}\perp$(평면 AHGB)

즉, $\overline{BD}$의 평면 AHGB 위로의 정사영은 $\overline{BK}$이다.

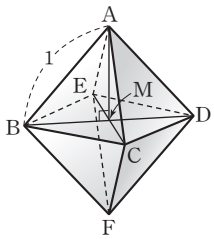
따라서 직각삼각형 BDK에서

$\overline{BD}=\sqrt{2}a$, $\overline{DK}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}a$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{DK}}{\overline{BD}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{2}$ **답 $\frac{1}{2}$**

170

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 M이라 하면 모서리 AB의 평면 BCDE 위로의 정사영은 $\overline{MB}$이다.



정팔면체의 한 모서리의 길이가 1이므로

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 모서리 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\angle ABM=\theta$

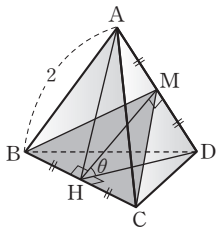
따라서 직각삼각형 ABM에서

$\cos\theta=\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \theta=45^\circ$ **답 45°**

171

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 H라 하면 $\overline{BC}\perp\overline{DH}$이므로



$\overline{DH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$

이등변삼각형 BCM에서

$\overline{BC}\perp\overline{MH}$이므로 직각삼각형 MHC에서

$\overline{MH}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

이때 평면 BCM과 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\angle MHD=\theta$

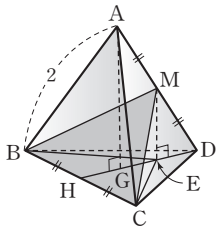
$\overline{MH}\perp\overline{AD}$이므로 직각삼각형 DMH에서

$\cos\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{DH}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 $\triangle BCM=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\triangle BCM\cos\theta=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$**

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 H, 점 A와 점 M의 평면 BCD 위로의 정사영을 각각 G, E라 하면 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이고 점 E는 선분 DG의 중점이다.



$\therefore\ \overline{EH}=\frac{2}{3}\overline{DH}=\frac{2}{3}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

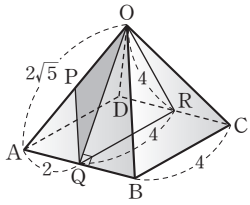
따라서 삼각형 BCM의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 BCE이므로 구하는 넓이는

$\triangle BCE=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EH}$

$=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

172

오른쪽 그림과 같이 이등변삼각형 OAB에서 $\overline{OQ}\perp\overline{AB}$이므로 직각삼각형 OAQ에서



$\overline{OQ}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

$\overline{CD}$의 중점을 R라 하면

$\overline{OQ}=\overline{OR}=\overline{QR}=4$

이므로 삼각형 OQR는 정삼각형이다.

이때 평면 OAB와 평면 OCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\angle QOR=\theta$이므로

$\cos\theta=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

한편, 점 P는 $\overline{OA}$의 중점이고

$\triangle OAQ=\frac{1}{2}\times2\times4=4$이므로

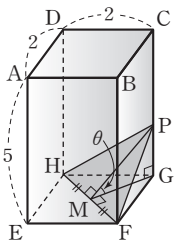
$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\triangle OAQ=\frac{1}{2}\times4=2$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$\triangle OPQ\cos\theta=2\times\frac{1}{2}=1$ **답 ③**

173

오른쪽 그림과 같이 점 G에서 $\overline{HF}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{PG}\perp$(평면 GHF), $\overline{GM}\perp\overline{HF}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PM}\perp\overline{HF}$

이때 평면 PHF와 평면 GHF가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\angle PMG=\theta$

한편, $\overline{GM}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$이고 점 P는 $\overline{CG}$를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$\overline{PG}=5\times\frac{2}{5}=2$

직각삼각형 PMG에서 $\overline{PM}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$

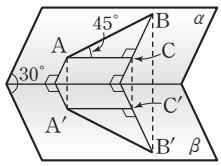
$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{GM}}{\overline{PM}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\triangle GHF=\frac{1}{2}\times2\times2=2$이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\triangle GHF\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **답** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

174

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 점 A를 지나고 두 평면 α, β의 교선과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 C, 점 C의 평면 β 위로의 정사영을 C′이라 하면 직각삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영은 직각삼각형 A′B′C′이다.



이때 $\overline{AB}=4$, $\angle BAC=45^\circ$이므로

$\overline{AC}=4\cos45^\circ=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

$\overline{BC}=4\sin45^\circ=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

한편, $\overline{AC}$와 평면 β는 평행하므로

$\overline{A'C'}=\overline{AC}=2\sqrt{2}$

또, $\overline{BC}$와 평면 β가 이루는 각의 크기는 30°이므로

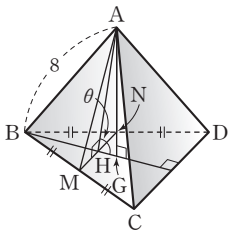
$\overline{B'C'}=\overline{BC}\cos30^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$

따라서 직각삼각형 A′B′C′에서

$\overline{A'B'}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{14}$ **답** $\sqrt{14}$

175

오른쪽 그림과 같이 $\overline{MN}$의 중점을 H, 삼각형 BCD의 무게중심을 G라 하고 $\angle AHG=\theta$라 하자.



직각삼각형 AMH에서

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times8=4\sqrt{3}$,

$\overline{HM}=\frac{1}{2}\overline{MN}=\frac{1}{2}\times4=2$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{11}$

$\overline{GH}=\overline{GB}-\overline{HB}=4\sqrt{3}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 AHG에서

$\cos\theta=\frac{\overline{GH}}{\overline{AH}}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{33}}{33}$

이때 사각형 CDNM의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

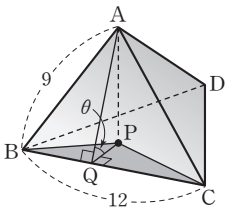
따라서 구하는 정사영의 넓이는

$\square CDNM\cos\theta=12\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{33}=\frac{12\sqrt{11}}{11}$

답 $\frac{12\sqrt{11}}{11}$

176

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABQ에서



$\overline{BQ}=\overline{AB}\cos(\angle ABC)$

$=9\times\frac{\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{AQ}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{6}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12\times3\sqrt{6}=18\sqrt{6}$

한편, $\overline{AP}\perp$(평면 BCD), $\overline{AQ}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PQ}\perp\overline{BC}$

이때 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\angle AQP=\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\cos(\angle AQP)=\frac{\sqrt{3}}{6}$

따라서 삼각형 BCP는 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이므로

$k=\triangle BCP=\triangle ABC\cos\theta$

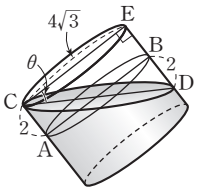
$=18\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{6}=9\sqrt{2}$

$\therefore\ k^2=(9\sqrt{2})^2=162$ **답 162**

177

컵을 기울이면 한쪽 수면이 올라온 만큼 반대쪽 수면이 내려간다.

오른쪽 그림과 같이 컵을 기울이기 전의 수면의 지름을 $\overline{AB}$, 컵을 최대로 기울였을 때의 수면의 장축을 $\overline{CD}$라 하면



$\overline{AC}=\overline{BD}=2$, $\overline{DE}=4$

한편, 컵의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 밑면의 넓이가 12π이므로

$\pi r^2=12\pi$ $\quad\therefore r=2\sqrt{3}$ $(\because r>0)$

즉, 컵의 밑면의 지름의 길이는

$\overline{CE}=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

이므로 직각삼각형 CDE에서

$\overline{CD}=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}=8$

$\angle DCE=\theta$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 수면의 넓이를 S라 하면

$S\cos\theta=12\pi$, $S\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\pi$

$\therefore S=\dfrac{12\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}\pi$ **답 $8\sqrt{3}\pi$**

178

점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하자.

점 A와 yz평면에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는

$(-a, b, c)$

점 B와 z축에 대하여 대칭인 점 C의 좌표는

$(a, -b, c)$

이 점이 점 $(3, -4, 6)$과 일치하므로

$a=3$, $b=4$, $c=6$

$\therefore$ A$(3, 4, 6)$ **답 (3, 4, 6)**

179

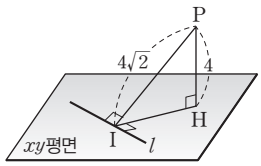
점 H를 원점, 세 모서리 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축 위에 놓으면 두 점 A, N의 좌표는 각각 $(3, 0, 3)$, $(1, 5, 0)$이므로

$\overline{AN}=\sqrt{(1-3)^2+5^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{38}$ **답 ④**

180

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{PH}\perp(xy$평면$)$,

$\overline{PI}\perp l$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HI}\perp l$

한편, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $(3, 5, 0)$이므로 $\overline{PH}=4$

이때 직각삼각형 PIH에서

$\overline{HI}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4$

따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 4이다.

답 ⑤

181

점 C(α, β, γ)가 xy평면 위에 있으므로

$\gamma=0$

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$(2-1)^2+(3-2)^2+(-1-1)^2$

$=(\alpha-2)^2+(\beta-3)^2+1^2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2-4\alpha-6\beta+8=0$ …… ㉠

또, $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$에서

$(\alpha-2)^2+(\beta-3)^2+1^2$

$=(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2+(-1)^2$

$\therefore \beta=-\alpha+4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\alpha^2-3\alpha=0$, $\alpha(\alpha-3)=0$

$\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=3$

㉡에서 $\alpha=0$일 때 $\beta=4$, $\alpha=3$일 때 $\beta=1$

그런데 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=3$, $\beta=1$

$\therefore \alpha-\beta+\gamma=3-1+0=2$ **답 2**

182

두 점 A$(1, 4, 3)$, B$(3, 1, 9)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(1-4)^2+(9-3)^2}=7$

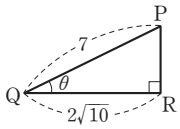
두 점 A, B에서 zx평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면 A′(1, 0, 3), B′(3, 0, 9)

$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(3-1)^2+0^2+(9-3)^2}=2\sqrt{10}$

이때 직선 AB와 zx평면이 이루는 예각의 크기가 θ이므로 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$에서 $2\sqrt{10}=7\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

오른쪽 그림의 직각삼각형 PQR에서



$\overline{PR}=\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}=3$

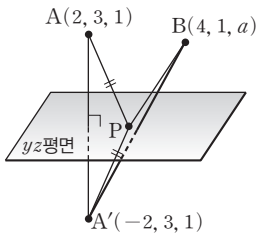
$\therefore \sin\theta=\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\frac{3}{7}$

답 $\frac{3}{7}$

183

두 점 A, B의 x좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표공간에서 yz평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

오른쪽 그림과 같이 점 A와 yz평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 A′(−2, 3, 1)



즉, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(4+2)^2+(1-3)^2+(a-1)^2}$

$=\sqrt{a^2-2a+41}$

이때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값이 $2\sqrt{14}$이므로

$\sqrt{a^2-2a+41}=2\sqrt{14}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-2a-15=0$, $(a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

답 ②

184

점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하면

두 점 A, D의 x좌표, z좌표가 각각 서로 같으므로

$a=3$, $c=6$

두 점 A, F의 y좌표가 서로 같으므로 $b=1$

$\therefore$ A(3, 1, 6)

또, 점 G의 좌표를 (p, q, r)라 하면

두 점 G, F의 x좌표, z좌표가 각각 서로 같으므로

$p=5$, $r=4$

두 점 G, D의 y좌표가 서로 같으므로 $q=7$

$\therefore$ G(5, 7, 4)

따라서 대각선 AG의 길이는

$\sqrt{(5-3)^2+(7-1)^2+(4-6)^2}=2\sqrt{11}$

답 ④

다른풀이 직육면체의 두 대각선의 길이는 서로 같으므로

$\overline{AG}=\overline{DF}$

$=\sqrt{(5-3)^2+(1-7)^2+(4-6)^2}$

$=2\sqrt{11}$

185

$\overline{PQ}=\sqrt{(2-t)^2+(2t-3)^2+(5-2t)^2}$

$=\sqrt{9t^2-36t+38}$

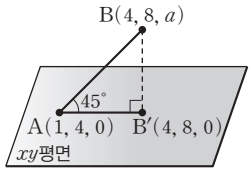
$=\sqrt{9(t-2)^2+2}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이는 $t=2$일 때 최솟값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

답 $\sqrt{2}$

186

오른쪽 그림과 같이 점 A는 xy평면 위의 점이고, 점 B의 xy평면 위로의 정사영을 B′이라 하면 B′(4, 8, 0)



$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(8-4)^2+a^2}$

$=\sqrt{a^2+25}$

$\overline{AB'}=\sqrt{(4-1)^2+(8-4)^2+0^2}$

$=5$

직선 AB와 xy평면이 이루는 각의 크기가 45°이므로

$\overline{AB'}=\overline{AB}\cos 45°$에서

$5=\sqrt{a^2+25}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{a^2+25}=5\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2=25$ $\therefore a=5$ ($\because a>0$)

$\therefore$ B(4, 8, 5)

한편, 두 점 A, B의 zx평면 위로의 정사영을 각각 A″, B″이라 하면

A″(1, 0, 0), B″(4, 0, 5)

따라서 선분 AB의 zx평면 위로의 정사영의 길이는

$\overline{A''B''}=\sqrt{(4-1)^2+0^2+5^2}=\sqrt{34}$ **답 $\sqrt{34}$**

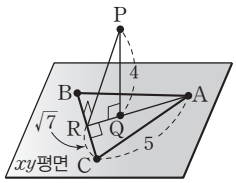
187

점 P의 xy평면 위로의 정사영 Q의 좌표는 (1, 1, 0)이므로 $\overline{PQ}=4$

오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{PQ}\perp(xy$평면), $\overline{QR}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PR}\perp\overline{BC}$



이때 점 Q는 이등변삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{QR}=\frac{1}{3}\overline{AR}=\frac{1}{3}\sqrt{5^2-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 PRQ에서

$\overline{PR}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

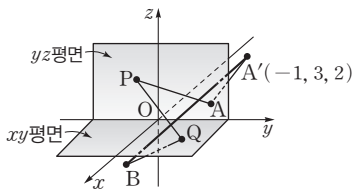
따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리는 $3\sqrt{2}$이다.

답 ①

188

두 점 A, B의 x좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표공간에서 yz평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

또, 두 점 A, B의 z좌표의 부호가 다르므로 두 점은 좌표공간에서 xy평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있다.



이때 점 A와 yz평면에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 A′(−1, 3, 2)

즉, $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB}$

$\geq\overline{A'B}$

$=\sqrt{(2+1)^2+(1-3)^2+(-1-2)^2}$

$=\sqrt{22}$ **답 $\sqrt{22}$**

189

$\overline{AB}=\sqrt{0^2+(4-1)^2+0^2}=3$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-2)^2+0^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{17}$

이때 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

세 점 A, B, C의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′이라 하면

A′(2, 1, 0), B′(2, 4, 0), C′(4, 4, 0)

$\therefore\ \overline{A'B'}=\sqrt{0^2+(4-1)^2+0^2}=3$

$\overline{B'C'}=\sqrt{(4-2)^2+0^2+0^2}=2$

$\overline{A'C'}=\sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2+0^2}=\sqrt{13}$

이때 $\overline{A'B'}^2+\overline{B'C'}^2=\overline{A'C'}^2$이므로 삼각형 A′B′C′은 $\angle B'=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\therefore\ \triangle A'B'C'=\frac{1}{2}\times\overline{A'B'}\times\overline{B'C'}$

$=\frac{1}{2}\times3\times2=3$

따라서 삼각형 ABC와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\triangle A'B'C'=\triangle ABC\cos\theta$에서

$3=3\sqrt{2}\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \theta=45^\circ$ **답 45°**

190

두 점 A(1, a, −6), B(−3, 2, b)에 대하여 $\overline{AB}$를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times(-3)-2\times1}{3-2},\ \frac{3\times2-2\times a}{3-2},\ \frac{3\times b-2\times(-6)}{3-2}\right)$

$\therefore\ (-11,\ 6-2a,\ 3b+12)$

이 점이 x축 위에 있으므로 y좌표와 z좌표는 모두 0이다. 즉, $6-2a=0$, $3b+12=0$에서

$a=3$, $b=-4$

$\therefore a+b=-1$ **답 ①**

191

점 $P(1, 2, -1)$에서

x축에 내린 수선의 발은 $A(1, 0, 0)$

yz평면에 내린 수선의 발은 $B(0, 2, -1)$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0-1}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

답 $\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

192

$\overline{OA}$, $\overline{OC}$가 이웃하는 두 변이므로 평행사변형 OABC의 두 대각선은 $\overline{OB}$, $\overline{AC}$이다.

$\overline{OB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0-4}{2}, \frac{0+q}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$ $\therefore \left(-2, \frac{q}{2}, -1\right)$

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{p+2}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{3+r}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{p+2}{2}, 3, \frac{3+r}{2}\right)$

이때 $\overline{OB}$의 중점과 $\overline{AC}$의 중점이 일치하므로

$-2=\frac{p+2}{2}$, $\frac{q}{2}=3$, $-1=\frac{3+r}{2}$

$\therefore p=-6$, $q=6$, $r=-5$

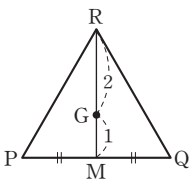
$\therefore p+q+r=-5$ **답 −5**

193

점 R의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{RM}$을 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times2+1\times a}{2+1}, \frac{2\times3+1\times b}{2+1}, \frac{2\times1+1\times c}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+6}{3}, \frac{c+2}{3}\right)$



이 점이 점 $G(2, 2, 1)$과 일치하므로

$\frac{a+4}{3}=2$, $\frac{b+6}{3}=2$, $\frac{c+2}{3}=1$

$\therefore a=2$, $b=0$, $c=1$

$\therefore R(2, 0, 1)$ **답 (2, 0, 1)**

194

두 점 A, A′이 점 P에 대하여 대칭이므로 점 P는 $\overline{AA'}$의 중점이다.

이때 $\overline{AA'}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{4+c}{2}\right)$

이 점이 점 $P\left(1, 2, \frac{3}{2}\right)$과 일치하므로

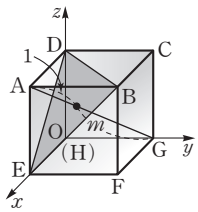
$\frac{1+a}{2}=1$, $\frac{1+b}{2}=2$, $\frac{4+c}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore a=1$, $b=3$, $c=-1$

$\therefore a-2b-3c=-2$ **답 −2**

195

오른쪽 그림과 같이 점 H를 원점, 세 모서리 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축 위에 놓으면



$A(2, 0, 2)$, $G(0, 2, 0)$

즉, $\overline{AG}$를 $1 : m$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times0+m\times2}{1+m}, \frac{1\times2+m\times0}{1+m}, \frac{1\times0+m\times2}{1+m}\right)$

$\therefore \left(\frac{2m}{1+m}, \frac{2}{1+m}, \frac{2m}{1+m}\right)$ …… ㉠

한편, $B(2, 2, 2)$, $D(0, 0, 2)$, $E(2, 0, 0)$이므로 삼각형 BDE의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+0+2}{3}, \frac{2+0+0}{3}, \frac{2+2+0}{3}\right)$

$\therefore \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ …… ㉡

이때 두 점 ㉠, ㉡이 일치하므로

$\frac{2m}{1+m}=\frac{4}{3}$, $\frac{2}{1+m}=\frac{2}{3}$

$\therefore m=2$ **답 2**

196

$\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점을 P라 하면

$P\left(\frac{1\times1+2\times(-5)}{1+2}, \frac{1\times1+2\times1}{1+2}, \frac{1\times(-2)+2\times7}{1+2}\right)$

$\therefore P(-3, 1, 4)$

$\overline{AB}$를 3 : 2로 외분하는 점을 Q라 하면

$Q\left(\frac{3\times1-2\times(-5)}{3-2}, \frac{3\times1-2\times1}{3-2}, \frac{3\times(-2)-2\times7}{3-2}\right)$

$\therefore Q(13, 1, -20)$

이때 구의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{PQ}$의 중점이므로

$C\left(\frac{-3+13}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{4-20}{2}\right)$

$\therefore C(5, 1, -8)$

또, 구의 반지름의 길이는

$\overline{CP}=\sqrt{(-3-5)^2+0^2+(4+8)^2}=4\sqrt{13}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-5)^2+(y-1)^2+(z+8)^2=208$

답 $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+8)^2=208$

197

점 C는 구 위의 한 점이므로 삼각형 ABC는 $\angle ACB=90^\circ$인 직각삼각형이다.

이때 $\overline{AC}=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$,

$\overline{BC}=\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}=\sqrt{30}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{30}$

$=3\sqrt{5}$ **답 ③**

198

$x^2+y^2+z^2-2kx+4y-10z+4k=0$에서

$(x-k)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=k^2-4k+29$

이때 구의 반지름의 길이는

$\sqrt{k^2-4k+29}=\sqrt{(k-2)^2+25}$

이므로 $k=2$일 때 반지름의 길이가 최소이다.

따라서 반지름의 길이가 최소일 때 구의 부피도 최소이므로 구하는 k의 값은 2이다. **답 2**

199

구의 중심은 두 점 (10, 2, 5), (−6, 10, 11)을 이은 선분의 중점이므로

$\left(\frac{10-6}{2}, \frac{2+10}{2}, \frac{5+11}{2}\right)$ $\therefore (2, 6, 8)$

또, 구의 반지름의 길이는 두 점 (2, 6, 8), (10, 2, 5) 사이의 거리이므로

$\sqrt{(10-2)^2+(2-6)^2+(5-8)^2}=\sqrt{89}$

즉, 구의 방정식은

$(x-2)^2+(y-6)^2+(z-8)^2=89$

한편, y축 위의 점은 x좌표와 z좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$, $z=0$을 대입하면

$4+(y-6)^2+64=89$ $\therefore y=6\pm\sqrt{21}$

따라서 두 교점 P, Q의 좌표는 $(0, 6+\sqrt{21}, 0)$, $(0, 6-\sqrt{21}, 0)$이므로

$\overline{PQ}=(6+\sqrt{21})-(6-\sqrt{21})=2\sqrt{21}$ **답 $2\sqrt{21}$**

200

주어진 구의 방정식에 $y=0$을 대입하면 구와 zx평면의 교선의 방정식은

$x^2+z^2-10x-8z+k=0$

$\therefore (x-5)^2+(z-4)^2=41-k$

따라서 주어진 구와 zx평면의 교선은 중심의 좌표가 $(5, 0, 4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{41-k}$인 원이다.

이 원의 넓이가 24π이므로

$\pi(\sqrt{41-k})^2=24\pi$, $41-k=24$

$\therefore k=17$ **답 ②**

201

구 S의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$의 중점이므로

$C\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$ $\therefore C(2, 3, 4)$

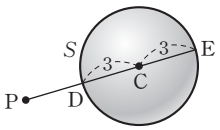
또, 구 S의 반지름의 길이는

$\overline{CA}=\sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2+(2-4)^2}=3$

즉, 구 S의 방정식은

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 직선 PC가 구와 만나는 두 점을 각각 D, E라 하면



$\overline{PC}$

$=\sqrt{(2-1)^2+(3+1)^2+(4+4)^2}$

$=9$

이때 선분의 길이의 최댓값은

$\overline{PE}=\overline{PC}+\overline{CE}=9+3=12$

선분의 길이의 최솟값은

$\overline{PD}=\overline{PC}-\overline{CD}=9-3=6$

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$12\times6=72$ **답 72**

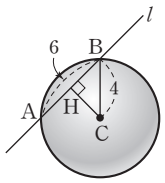
202

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(1, -2, 3)$이고 반지름의 길이는 4이다.

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CB}=4$, $\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$

따라서 직각삼각형 CBH에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{BH}^2}$

$=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ **답 ②**

203

$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$에서 $3\overline{PA}=2\overline{PB}$이므로

$9\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$

이때 P(x, y, z)라 하면

$9\{x^2+(y-2)^2+z^2\}=4\{x^2+(y+3)^2+z^2\}$

$9x^2+9y^2-36y+36+9z^2$

$=4x^2+4y^2+24y+36+4z^2$

$x^2+y^2+z^2-12y=0$

$\therefore x^2+(y-6)^2+z^2=36$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(0, 6, 0)$이고 반지름의 길이가 6인 구이므로 구하는 부피는

$\frac{4}{3}\pi\times6^3=288\pi$ **답 288π**

204

구가 xy평면에 접하므로 구 위의 점 $(-1, 1, -1)$과 구의 중심 (a, b, c)가 xy평면에 대하여 같은 영역에 존재하여야 한다.

$\therefore c<0$

이때 구의 반지름의 길이가 3이고 xy평면에 접하므로

$|c|=3$ $\quad\therefore c=-3$

즉, 구의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z+3)^2=9$

이 구가 z축에 접하므로 $\sqrt{a^2+b^2}=3$에서

$a^2+b^2=9$ ····· ㉠

또, 구가 점 $(-1, 1, -1)$을 지나므로

$(-1-a)^2+(1-b)^2+(-1+3)^2=9$

$\therefore a^2+b^2+2a-2b=3$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2a-2b=-6$

$\therefore a-b=-3$

$\therefore a-b+c=-3+(-3)=-6$ **답 -6**

205

구의 방정식을

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ ····· ㉠

이라 하고 ㉠에 $z=0$을 대입하면 구와 xy평면의 교선의 방정식은

$x^2+y^2+Ax+By+D=0$ ····· ㉡

이 원의 중심이 점 $(3, 2, 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$(x-3)^2+(y-2)^2=5$

$\therefore x^2+y^2-6x-4y+8=0$ ····· ㉢

㉡, ㉢에서 $A=-6$, $B=-4$, $D=8$

즉, ㉠에서 구의 방정식은

$x^2+y^2+z^2-6x-4y+Cz+8=0$

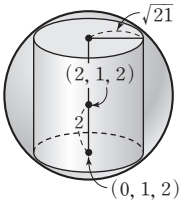
또, 구는 점 P$(1, 1, 8)$을 지나므로

$1+1+64-6-4+8C+8=0$ $\quad\therefore C=-8$

㉠에서 $x^2+y^2+z^2-6x-4y-8z+8=0$이므로
$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=21$
따라서 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{21}$이다. **답 $\sqrt{21}$**

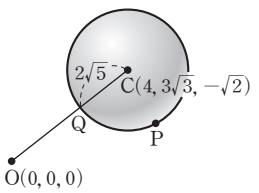
206

주어진 구의 방정식에 $x=0$을 대입하면 구와 yz평면의 교선의 방정식은
$4+(y-1)^2+(z-2)^2=25$
$\therefore (y-1)^2+(z-2)^2=21$
즉, 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\sqrt{21}$이다.
한편, 오른쪽 그림과 같이 구의 중심의 좌표는 $(2, 1, 2)$이고 원의 중심의 좌표는 $(0, 1, 2)$이므로 원기둥의 높이는
$2\times 2=4$
따라서 원기둥의 부피는
$\pi\times(\sqrt{21})^2\times 4=84\pi$ **답 84π**



207

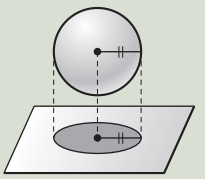
$x^2+y^2+z^2-8x-6\sqrt{3}y+2\sqrt{2}z+25=0$에서
$(x-4)^2+(y-3\sqrt{3})^2+(z+\sqrt{2})^2=20$
이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(4, 3\sqrt{3}, -\sqrt{2})$이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다.
한편,
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2+(c-0)^2}$
에서 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$은 구 위의 점 $P(a, b, c)$와 원점 사이의 거리이다.
오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C라 하면
$\overline{CO}$
$=\sqrt{4^2+(3\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2}$
$=3\sqrt{5}$
이때 직선 OC와 구가 만나는 점을 Q라 하면
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$의 최솟값은
$\overline{OQ}=\overline{CO}-\overline{CQ}$
$=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$
따라서 $a^2+b^2+c^2$의 최솟값은 $(\sqrt{5})^2=5$ **답 5**



208

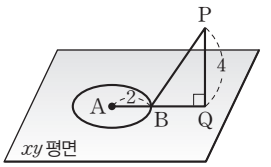
$x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0$에서
$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$
이 구의 xy평면 위로의 정사영의 방정식은
$(x-1)^2+(y+2)^2=4$ ····· ㉠
이고 중심의 좌표는 $(1, -2, 0)$, 반지름의 길이는 2인 원이다.
$x^2+y^2+z^2+4x-4y-6z+k=0$에서
$(x+2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=17-k$
이 구의 xy평면 위로의 정사영의 방정식은
$(x+2)^2+(y-2)^2=17-k$ ····· ㉡
이고 중심의 좌표는 $(-2, 2, 0)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{17-k}$인 원이다.
두 원 ㉠, ㉡이 서로 외접하므로 두 원의 중심 사이의 거리는 반지름의 길이의 합과 같다.
즉, $\sqrt{(1+2)^2+(-2-2)^2+0^2}=2+\sqrt{17-k}$에서
$3=\sqrt{17-k}$, $9=17-k$
$\therefore k=8$ **답 8**

KEY Point
구의 평면 위로의 정사영은 원이고 이 원의 반지름의 길이는 구의 반지름의 길이와 같다.



209

주어진 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면 구와 xy평면의 교선의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2+9=13$
$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=4$
즉, 주어진 구와 xy평면의 교선은 중심이 점 $(1, 2, 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.
오른쪽 그림과 같이 교선인 원의 중심을 A, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하면
Q$(5, 5, 0)$이므로



$\overline{AQ}=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2+0^2}=5$

$\overline{PQ}=4$

이때 선분 AQ와 교선의 교점을 B라 하면

$\overline{BQ}=\overline{AQ}-\overline{AB}=5-2=3$

따라서 구하는 최솟값은 $\overline{PB}$의 길이이므로 직각삼각형 PBQ에서

$\overline{PB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ **답 5**

210

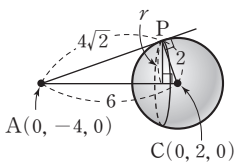
$x^2+y^2+z^2-4y=0$에서

$x^2+(y-2)^2+z^2=4$

구의 중심을 C라 하면 C(0, 2, 0)이므로

$\overline{AC}=6$

또, 오른쪽 그림과 같이 원뿔과 구의 교선 위의 한 점을 P라 하면 직각삼각형 ACP에서



$\overline{AP}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

이때 원뿔과 구의 교선은 원이므로 이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times6\times r=\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{2}$

$\therefore r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

따라서 구하는 교선의 길이는

$2\pi\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ **답 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$**

211

$(x-a)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=a^2-4a+20$ … ㉠

(i) ㉠에 $z=0$을 대입하면 구와 xy평면이 만나서 생기는 도형의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2)^2+9=a^2-4a+20$

$\therefore (x-a)^2+(y-2)^2=a^2-4a+11$

즉, 구가 xy평면과 만나서 생기는 도형은 중심이 점 $(a, 2, 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2-4a+11}$인 원이므로 그 넓이는

$(a^2-4a+11)\pi$

(ii) ㉠에 $x=0$을 대입하면 구와 yz평면이 만나서 생기는 도형의 방정식은

$a^2+(y-2)^2+(z+3)^2=a^2-4a+20$

$\therefore (y-2)^2+(z+3)^2=-4a+20$

즉, 구가 yz평면과 만나서 생기는 도형은 중심이 점 $(0, 2, -3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{-4a+20}$인 원이므로 그 넓이는

$(-4a+20)\pi$

(iii) ㉠에 $y=0$을 대입하면 구와 zx평면이 만나서 생기는 도형의 방정식은

$(x-a)^2+4+(z+3)^2=a^2-4a+20$

$\therefore (x-a)^2+(z+3)^2=a^2-4a+16$

즉, 구가 zx평면과 만나서 생기는 도형은 중심이 점 $(a, 0, -3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2-4a+16}$인 원이므로 그 넓이는

$(a^2-4a+16)\pi$

(i), (ii), (iii)에서 구가 xy평면, yz평면, zx평면과 만나서 생기는 도형의 넓이의 합은

$(a^2-4a+11)\pi+(-4a+20)\pi+(a^2-4a+16)\pi$

$=(2a^2-12a+47)\pi$

$=\{2(a-3)^2+29\}\pi$

따라서 구하는 넓이의 합의 최솟값은 $a=3$일 때 29π이다. **답 ④**

212

구의 중심을 점 C(a, b, c) $(a>0, b>0, c>0)$, 반지름의 길이를 r라 하고, 구가 x축, y축과 접하는 점을 각각 A, B라 하면

A$(a, 0, 0)$, B$(0, b, 0)$

이때 $r=\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$에서

$b^2+c^2=a^2+c^2$

$a^2=b^2$ $\therefore a=b$ ($\because a>0, b>0$)

즉, 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$ …… ㉠

㉠에 $z=0$을 대입하면 구가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+c^2=a^2+c^2$

$\therefore (x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

연습문제 실력 UP

이 원의 넓이가 64π이므로

$a^2\pi=64\pi$, $a^2=64$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

이것을 ㉠에 대입하면 구 S의 방정식은

$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=64+c^2$ ····· ㉡

㉡에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 구가 z축과 만나는 점의 z좌표는

$64+64+(z-c)^2=64+c^2$

$(z-c)^2=c^2-64$

$\therefore z=c\pm\sqrt{c^2-64}$

즉, 구가 z축과 만나는 점의 좌표는

$(0, 0, c+\sqrt{c^2-64})$, $(0, 0, c-\sqrt{c^2-64})$

이고 두 점 사이의 거리는 8이므로

$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$

$\sqrt{c^2-64}=4$, $c^2-64=16$

$\therefore c^2=80$

따라서 구 S의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{64+80}=12$ **답 ②**